חדוו"א2 להנדסת מכונות, בחינה סופית. מועד א.
אוניברסיטת בן גוריון

מספר נבחן: ______________	כללים : אסור לכתוב בצבע אדום.
מרצים: ע.אייזנמן, א.לרמן ,ל.ספיר ,ד.קרנר	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון,
מספר הקורס: 201.1.9721	לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות
תאריך: 29.06.2014	ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
משך הבחינה: שלוש שעות	בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות
חומר עזר: דף $A4$ דו-צדדי, ללא מחשבון.	לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת
ניקוד: פתרו את כל השאלות **(סה"כ 110 נקודות)**	דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

1. (א) (10) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x+1}{x+2})^n\frac{1}{\sqrt{n}}$. ציינו איפה ההתכנסות בהחלט ואיפה היא בתנאי.

   (ב) (15) יהי $\vec{F}=(0,x+1,0)$. חשבו את שטף השדה $rot(\vec{F})$, דרך המשטח $S=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq-\sqrt{2}\}$, עם הנורמל החיצוני. (רמז: כדאי לחשב את $div(rot\vec{F})$.)

2. (א) (10) תהי $\phi(x,y,z)=f(x^2-2y^3+z^4)$, כאשר $f(t)$ פונקציה גזירה ברציפות עם נגזרת לא מתאפסת. הוכיחו כי $\frac{y^2z^3\partial_x\phi+xz^3\partial_y\phi+xy^2\partial_z\phi}{f'(x^2-2y^3+z^4)}$ הנו קבוע ומצאו את הקבוע.

   (ב) (15) חשבו את $\iint\limits_{\mathcal{D}}\sqrt{|\frac{y}{x}|}dxdy$, כאשר $\mathcal{D}=\{\frac{1}{x}\leq y\leq\frac{2}{x},\ \ 3x\leq y\leq 5x\}$.

3. (א) (15) חשבו את $\int\limits_{\gamma}(z^2dx+3y^2dy-x^2dz)$ לאורך העקום $\gamma=\{x^2+z^2=1,\ \ y=\sqrt{\pi}\}$ בעל כיוון המתאים לנורמל עם $\mathcal{N}_y>0$.

   (ב) (10) האם הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^8y}{x^{16}+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ דיפרנציאבילית בראשית הצירים?

4. (א) (12) מצאו את המסה הכוללת של הגוף $V=\{z^2\leq x^2+y^2+1\leq 2\}$ בעל הצפיפות $\rho=z^2+1$.

   (ב) (13) חשבו את $\int\limits_{\gamma}\Big((e^xsin(y)-y+1)dx+(e^xcos(y)-1)dy\Big)$, לאורך העקום $\gamma=\{x^2+y^2=2x,\ y\geq0\}$ המתחיל ב $(0,0)$ ומסתיים $(2,0)$.

5. (10) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $g(x,y)=e^{x^2+3y^2}$ בתחום $\{4x^2+y^2\leq1\}$.

בהצלחה!

Sketchy solutions of Moed.A, Hedva2.ME, 20119721

29.06.2014 Ben Gurion University

(1) a. To check the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ we first check whether $a_n \to 0$. One gets: if $|\frac{x+1}{x+2}| > 1$ then $|a_n| \to \infty$. Thus the necessary criterion for convergence is: $|\frac{x+1}{x+2}| \leq 1$.

If $\frac{x+1}{x+2} = 1$ then the series diverges. If $\frac{x+1}{x+2} = -1$ then the series converges (Leibnitz criterion) and the convergence is conditional. If $|\frac{x+1}{x+2}| < 1$ then the series converges absolutely.

Finally, we get: for $x > -\frac{3}{2}$ the convergence is absolute, for $x = -\frac{3}{2}$ the convergence is conditional.

b. Note that $div(rot\vec{F}) = 0$ therefore the flow of the field $rot\vec{F}$ over the closed surface is zero. (Note that $rot\vec{F}$ is differentiable everywhere.)

Therefore by Gauss' theorem: $\oiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=4 \\ z \geq -\sqrt{2}}} rot\vec{F} d\hat{S} + \oiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 4 \\ z = -\sqrt{2}}} rot\vec{F} d\hat{S} = 0.$

In the first integral one takes the exterior normal, thus in the second integral the normal is downstairs. Note that $rot\vec{F} = (0,0,1)$. Therefore: $\oiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=4 \\ z \geq -\sqrt{2}}} rot\vec{F} d\hat{S} = -\oiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 4 \\ z = -\sqrt{2}}} (0,0,1) d\hat{S} = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 4-2} dxdy = 2\pi$

(2) a. By the direct check, $\frac{y^2z^3\partial_x\phi + xz^3\partial_y\phi + xy^2\partial_z\phi}{f'(x^2-2y^3+z^4)} = 0$

b. Introduce the new coordinates: $s = xy$, $t = \frac{y}{x}$. The domain of the integration is now: $\mathcal{D} = \{1 \leq s \leq 2,\ 3 \leq t \leq 5\}$. To compute the Jacobian for this change of coordinates we start from $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$. Thus $|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}| = \frac{1}{2t}$.

Finally: $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{|\frac{y}{x}|} dxdy = \iint\limits_{\substack{1\leq s\leq 2 \\ 3\leq t\leq 5}} \frac{\sqrt{|t|}}{2t} dsdt = \int_1^2 ds \int_3^5 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$

(3) a. First we parameterize the curve: $x = cos(\phi)$, $z = sin(\phi)$, $y = \sqrt{\pi}$. Here $\phi \in [0, 2\pi]$. The orientation of the curve corresponds to the normal with $\mathcal{N}_y > 0$, therefore the parameter ϕ changes from 2π to 0. In terms of the parameter: $z^2dx + 3y^2dy - x^2dz = -(sin^3(\phi) + cos^3(\phi))d\phi$. Thus $\int\limits_{\gamma}(z^2dx + 3y^2dy - x^2dz) = -\int_{2\pi}^{0}(sin^3(\phi) + cos^3(\phi))d\phi$.

As $cos(\phi)$, $sin(\phi)$ are periodic functions, $\int_0^{2\pi} cos^3(\phi)d\phi = 0$ and $\int_0^{2\pi} sin^3(\phi)d\phi = 0$. Thus $\int\limits_{\gamma}(z^2dx + 3y^2dy - x^2dz) = 0$.

b. First we check the continuity. Consider the curves $y = \lambda x^8$. Along these curves: $f(x, \lambda x^8) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, i.e. for different curves we get different limits. Therefore the limit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ does not exist. Thus $f(x,y)$ is not continuous at the origin, in particular not differentiable.

(4) a. $\iiint\limits_V \rho dV = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{-\sqrt{x^2+y^2+1}}^{\sqrt{x^2+y^2+1}} (z^2+1)dz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left(2\sqrt{x^2+y^2+1} + 2\frac{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dxdy.$

Therefore (using polar coordinates): $\iiint\limits_V \rho dV = 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \left(\sqrt{1+r^2} + \frac{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) rdr$. Now change the variable, $t = r^2$, to get: $\iiint\limits_V \rho dV = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{1+t} + \frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)dt = \frac{4\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1 + \frac{2^{\frac{5}{2}}-1}{5})$.

b. To use Green's theorem we add to the initial curve γ the curve $\gamma' := \{y = 0,\ x \in [0,2]\}$, beginning at $(2,0)$ and ending at $(0,0)$. Then: $\oint\limits_{\gamma\cup\gamma'} \vec{F}d\vec{\gamma} = -\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 2x \\ y\geq 0}} (\partial_x F_y - \partial_y F_x)dxdy = -\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 2x \\ y\geq 0}} dxdy = -\frac{\pi}{2}$.

Now $\int\limits_{\gamma'} \vec{F}d\vec{\gamma} = \int_2^0 F_x|_{y=0}dx = \int_2^0 dx = -2$, thus $\int\limits_{\gamma} \vec{F}d\vec{\gamma} = 2 - \frac{\pi}{2}$.

(5) The only critical point in the interior of the disc is $(x,y) = (0,0)$ and this is the local minimum. The function at this point equals 1.

For the critical points on the boundary we get the condition: $2x \cdot 2y = 6y \cdot 8x$, i.e. $xy = 0$. Thus the points to consider are: $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ and $(0, \pm 1)$. The values of the function at these points are: $e^{\frac{1}{4}}$ and e^3. Thus the points $(0, \pm 1)$ are the global maxima, while the point $(0,0)$ is the global minimum.