תרגיל 10 באלגברה 2

1) במרחב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, מצאו בסיס אורתונורמ-לי לתתמרחב

$$\mathrm{Span}\{(1,1,1,1),(1,-1,2,2),(1,2,-3,-4)\}\,.$$

2) יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. יישמו את שיטת גרם-שמידט לקבוצה $\{1,x,x^2\}$.

3) במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, יהא $W=\mathrm{Span}\{(1,1)\}$ ותהא $E\colon\mathbb{R}^2\to W$ ההטלה האורתוגונלית על W.

(א) מצאו נוסחה עבור $E(x,y)$.

(ב) חשבו את המטריצה של E לפי הבסיס הסטנדרטי.

(ג) חשבו את $W^\perp=\{v\in V \mid \forall w\in W:\langle v,w\rangle=0\}$.

(ד) מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ שהמטריצה של E לפיו היא $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

4) במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, יהא

$$W=\mathrm{Span}\{(1,-i,2+i,2-i),\ (-i,i,0,0),\ (2-2i,-2-i,5,3-2i)\}\,.$$

מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור (i,i,i,i) על W.

5) הראו שאם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו-T אופרטור לינארי על V הניתן לשילוש, אז קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{E}$ של V כך ש-$[T]_{\mathcal{E}}$ משולשית.

6) יהיו $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^n ka_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n\frac{b_k^2}{k}\right)$$

7) מצאו $a,b,c\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\int_0^1(x^3-ax^2-bx-c)^2dx$$

מינימלי.