תרגיל 11 באלגברה 2

1) יהיו U ו-W תת-מרחבים מממד סופי של מרחב מכפלה פנימית V.
הוכיחו:

(א) אם $W \subseteq U$ אז $W^\perp \subseteq U^\perp$

(ב) $(U+W)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$

(ג) $(W^\perp + U^\perp) \subseteq (W \cap U)^\perp$

(ד) אם V ממימד סופי, אז $(W^\perp + U^\perp) = (W \cap U)^\perp$

2) נגדיר אופרטור לינארי T על $\mathbb{C}^2$ על ידי

$$T(e_1) = (1,-2),\ T(e_2) = (i,-1) \ .$$

הציגו בצורה מפורשת את T^*.

3) נגדיר אופרטור T על $\mathbb{C}^2$ על ידי $T(e_1) = (1+i, 2),\ T(e_2) = (i,i)$.
מצאו את $[T^*]_{\mathcal{E}}$ ובדקו האם T ו-T^* מתחלפים בכפל.

4) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו-$T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הראו כי $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

5) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו-$T\colon V \to V$ אופרטור לינארי. הראו כי T הפיך אם ורק אם T^* הפיך וכי במקרה זה מתקיים $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

6) תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. הראו כי $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

7) יהא $V = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(AB^*)$. תהא $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה הפיכה ונגדיר אופרטור לינארי $T\colon V \to V$ על ידי $T(A) = P^{-1}AP$. מצאו את T^*.

8) יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית ותהא $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הראו כי $\langle v, u\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle$ לכל $v, u \in V$ אם ורק אם $||T(v)|| = ||v||$ לכל $v \in V$.