תרגיל 21 באלגברה 2

1) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו-W תת מרחב של V. נגדיר אופרטור $T: V \to V$ באופן הבא: לכל $v \in V$ נציג באופן יחיד $v = w + z$ כאשר $w \in W$ ו-$z \in W^{\perp}$ ונגדיר $T(v) = w - z$.

(א) הראו כי אופרטור לינארי T צמוד לעצמו ואוניטרי.

(ב) הראו כי כל אופרטור אוניטרי וצמוד לעצמו מתקבל בצורה כזאת.

(ג) יהא $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. יהא $W = \operatorname{Span}\{(1,0,1)\}$. מצאו את $[T]_{\mathcal{E}}$.

2) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ו-$T: V \to V$ אופרטור נורמלי. הראו כי אם 0 הינו ערך עצמי יחיד של T אז $T = 0$.

3) הוכיחו כי אוסף האופרטורים הלינאריים האוניטריים על מרחב ווקטורי נתון, סגור תחת פעולות ההרכבה וההופכי.

4) יהיה V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ו-$T: V \to V$ אופרטור נורמלי. הוכיחו כי T צמוד לעצמו אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T הם ממשיים.

5) יהיו T ו-S אופרטורים צמודים לעצמם על מרחב V. הראו כי TS צמוד לעצמו אם ורק אם $TS = ST$.

6) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- $T: V \to V$ אופרטור נורמלי. הראו כי $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^*)$

7) הראו כי התנאים הבאים על מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ שקולים:

(א) A אוניטרית

(ב) קיים מרחב מכפלה פנימית V ממימד n ובסיסים אורתונורמליים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ל-V כך ש-$A = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(ג) קיימים בסיסים אורתונורמליים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ל-F^n (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית) כך ש-$A = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

8) יהיה $T: V \to V$ אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית ממד סופי ויהיו v, u וקטורים עצמיים של T המתאימים לערכים עצמיים שונים. הוכיחו כי $\langle v, u\rangle = 0$.