

תרגיל 2 באלגברה 2

(1) נתבונן בבסיס $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ ל- $V = \mathbb{R}^3$, באשר
 $v_1 = (2, -1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 1)$.

- (א) מצאו פונקציונל לינארי f עם $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$, $f(v_3) = 0$
 (ב) חשבו את $\text{Ker } f$.
 (ג) חשבו את \mathcal{B}^* .

(2) במרחב הוקטורי \mathbb{Q}^4 מעל \mathbb{Q} יהא $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ באשר
 $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 3, 7)$.

- (א) בדקו ש- \mathcal{B} בסיס ל- \mathbb{Q}^4 .
 (ב) מצאו את הבסיס הדואלי \mathcal{B}^* ל- \mathcal{B} .
 (ג) מצאו פונקציונל לינארי f על \mathbb{Q}^4 המקיים $f(v_i) = i$ לכל i .

(3) יהא $V = F_{\leq 2}[X]$ מרחב הפולינומים ממעלה ≥ 2 עם מקדמים בשדה F . נגדיר פונקציונלים לינאריים L_1, L_2, L_3 על V ע"י $L_i(p) = p(i)$.
 (א) הוכיחו כי $\mathcal{B}^* = (L_1, L_2, L_3)$ הינו בסיס של V^* .
 (ב) מצאו בסיס \mathcal{B} ל- V כך ש- \mathcal{B}^* הבסיס הדואלי של \mathcal{B} .

(4) (א) מצאו את הפולינום מעל \mathbb{R} מן המעלה הנמוכה ביותר המקיים
 $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$.
 (ב) נתון $f \in \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ המקיים $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$. האם
 יתכן ש- $f(0) = 0$? האם יתכן $f(0) = 1$?
 (ג) מצאו פולינום $f \in \mathbb{C}[X]$ המקיים

$$f(1) = f(-1) = i, f(i) = f(1+i) = -1, f(0) = 0$$

(5) יהיה $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ ונגדיר $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ ע"י

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx, f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)dx$$

הוכיחו כי $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ הינו בסיס של V^* . מצאו בסיס ב- V ש- \mathcal{B}^* הינו בסיס דואלי שלו.

(6) יהיו V ו- W מרחבנים ווקטוריים מעל שדה F ותהא $T : V \rightarrow W$ טר-נספורמציה לינארית. הטרנספורמציה המוחלפת $T^t : W^* \rightarrow V^*$ מוגדרת על ידי הנוסחה $(T^t(g))(v) = g(T(v))$ לכל $g \in W^*$ ו- $v \in V$.

(א) בדקו כי T^t מוגדרת היטב והינה טרנספורמציה לינארית.

(ב) יהיה F שדה ויהיו $V = W = M_n(F)$. נקבע מטריצה $C \in M_n(V)$. נגדיר טרנספורמציה לינארית $T : V \rightarrow V$ ע"י $T(A) = AC - CA$ ונגדיר פונקציונל לינארי $f : V \rightarrow F$ ע"י $f(A) = \text{Tr}(A)$. חשבו את $T^t(f)$.

(ג) נניח כי V, W מממד סופי. יהיו B, C בסיסים שלהם, עם בסיסים דואלים B^*, C^* של V^*, W^* , בהתאמה. הוכיחו כי $[T^t]_{B^*}^{C^*} = ([T]_C^B)^t$.