תרגיל 3 באלגברה 2

1) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Q}$. חשבו את $f(A)$ עבור הפולינומ-ים $f = X^2 - X + 2$ ו-$f = X^3 - 1$ מעל $\mathbb{Q}$.

2) נגדיר אופרטור לינארי T על $\mathbb{R}^3$ ע"י $T(x,y,z) = (x, z, -2y - z)$. יהא $f = -X^3 + 2 \in \mathbb{R}[X]$. חשבו את $f(T)$.

3) כמה פולינומים ממעלה קטנה מ-3 מעל $\mathbb{Z}_5$ מקיימים $f(1) = f(2) = 0$? מצאו את כולם.

4) הוכיחו את משפט החלוקה עם שארית:
יהי F שדה, ויהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים כך ש-$g \neq 0$, אזי קיים זוג יחיד של פולינומים, $q, r \in F[x]$ כך ש-$f = gq + r$, וגם $r = 0$ או $\deg(r) < \deg(g)$.

5) חלקו את הפולינומים הבאים עם שארית, כלומר לכל זוג פולינומים f, g, מצאו את הזוג q, r המתאים (ראו שאלה קודמת):

(א) $f = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 5X + 3$, $g = X + 1$ מעל $\mathbb{Q}$.

(ב) $f = X^5 + 2X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$, $g = X^3 + X + 1$ מעל $\mathbb{Z}_7$.

(ג) $f = X^3 + X$, $g = X + 1$ מעל $\mathbb{Z}_2$.

6) יהי F שדה. אופרטור הנגזרת הפורמלית $D \colon F[X] \to F[X]$ מוגדר ע"י

$$D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i \ .$$

(א) הראו ש-D הוא אופרטור לינארי על $F[X]$.

(ב) הראו שלכל שני פולינומים $f, g \in F[X]$ מתקיים

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

(ג) יהא $\alpha \in F$ ויהא $f \in F[X]$. הראו ש-$(X - \alpha)^2$ מחלק את f אם ורק אם α שורש של f וגם α שורש של $D(f)$.

7) לכל אחת מקבוצות הפולינומים הבאות ב-$F[X]$ (F שדה כלשהו), קיבעו אם היא מהווה אידאל. אם כן, מצאו את היוצר של האידאל.

(א) קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה מ-m בצרוף פולינום האפס.

(ב) קבוצת הפולינומים ממעלה גדולה מ-m בצרוף פולינום האפס.

(ג) קבוצת הפולינומים שהמקדם החופשי שלהם הוא אפס.

(ד) $\{f \in F[X] \mid f(1) = 0\}$.

(ה) $\{f \in F[X] \mid f(1) = 1\}$.

(ו) $\{f \in F[X] \mid f(0) = f(1)\}$.

(ז) $\{f \in F[X] \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

8) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Q}$.

(א) הראו כי האוסף I של כל הפולינומים $f \in F[X]$ המקיימים $f(A) = 0$ הינו אידאל.

(ב) מצאו את הפולינום המתוקן d המקיים $I = dF[X]$.

9) יהי F שדה סופי. הראו שקיים פולינום $f \in F[X]$ כך ש-$\deg(f) = 2$ ו-f אי-פריק, כלומר אין פולינומים g_1, g_2 ממעלה 1 המקיימים $f = g_1 g_2$.