תרגיל 4 באלגברה 2

1) חלקו עם שארית את $f(x)$ ב-$g(x)$ מעל $\mathbb{C}$ כאשר:

א) $f(x) = x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - x^2 + 2x - 1,\ g(x) = x^4 - 1$.

ב) $f(x) = x^{17} - x^{10} + 2x^3 - 1,\ g(x) = x^2 + 1$.

2) מצאו את $\gcd(f(x), g(x))$ מעל $\mathbb{C}$ כאשר:

א) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2,\ g(x) = x^2 + 3x - 4$.

ב) $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2,\ g(x) = x^3 + 2$.

3) פרקו את הפולינומים הבאים למכפלה של גורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$:

א) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

ב) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

4) מצאו את כל הפולינומים האי פריקים ממעלה 3 מעל $\mathbb{Z}_2$.

5) הוכיחו כי $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ אינו פריק מעל $\mathbb{Z}_2$.

6) פרקו את הפולינומים הבאים לגורמים לינאריים מעל השדות הנתונים (אם הדבר אפשרי):

א) $x^2 + 1$ מעל $\mathbb{Z}_5$.

ב) $x^3 + 5x^2 + 5$ מעל $\mathbb{Z}_{11}$.

ג) $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Z}_3$.

7) יהא p פולינום מתוקן (=מוני), ויהיו f ו-g פולינומים זרים. הראו כי $\gcd(pf, pg) = p$.

8) המשפט היסודי של האלגברה: אם f פולינום מרוכב ממעלה גדולה או שווה לאחד, אז קיים מספר מרוכב c כך ש-$f(c) = 0$.
בהסתמך על המשפט היסודי של האלגברה, הוכיחו כי ל-$f, g \in \mathbb{C}[x]$ מתקיים $\gcd(f, g) = 1$ אם ורק אם אין ל-f, g שורש משותף.

השאלות הבאות הן לפתרון בהתאם להתקדמות בחומר.

9) יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, יהא E אופרטור הטלה על V.
הוכיחו:

(א) $v \in \mathrm{Im}(E)$ אם ורק אם $E(v) = v$.

(ב) $V = \mathrm{Im}(E) \oplus \mathrm{Ker}(E)$.

(ג) לכל $v \in V$, ההצגה היחידה של v כסכום של וקטור מ-$\mathrm{Im}(E)$ ווקטור מ-$\mathrm{Ker}(E)$ היא $v = E(v) + (v - E(v))$

10) הראו שאם f פולינום מעל שדה, ו-E אופרטור הטלה, אזי $f(E) = aI + bE$. הציגו את a, b כפונקציות של מקדמי f.