

תרגיל 8 באלגברה 2

- (1) הוכיחו או הפריכו: (א) לכל אופרטור לינארי $T : V \rightarrow V$ קיים לפחות וקטור עצמי אחד.
 (ב) אם מטריצה משולשת נתנת ללכסון, אז היא אלכסונית.

(2) יהא $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ האופרטור הלינארי כך ש-

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

יהא $W = \text{Ker}(T - 2I)$. הוכיחו כי אין ל- \mathbb{R} תת-מרחב אינוריאנטי- T כך ש- $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

(3) יהא $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי המיוצג בבסיס הסטנדרטי ע"י המטריצה

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

חשבו את הפרוק הפרימארי של T כדלקמן:
 (א) הציגו את הפולינום המינימלי של T כ- $\prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$ כאשר $m_T(x) = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$ טבעיים $r_1, \dots, r_k \geq 1$ ו- \mathbb{R} מעל \mathbb{R} .

(ב) לכל $1 \leq i \leq k$ יהא $W_i = \text{Ker}(p_i^{e_i}(T))$. מצאו בסיס \mathcal{B}_i ל- W_i ואת המטריצה $A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

(ג) עבור $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ מצאו את $[T]_{\mathcal{B}}$.

(4) כמו בשאלה הקודמת עבור המטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) יהא $T : V \rightarrow V$ אופרטור לינארי על מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו

$$m_T(x) = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}, \quad W_i = \text{Ker}(p_i^{e_i}(T))$$

כבשאלה 4. הראו כי אם U תת-מרחב אינוארינטי- T , אז

$$U = (U \cap W_1) \oplus \dots \oplus (U \cap W_r)$$

(6) נגדיר "פולינום מינימלי של וקטור v ביחס לאופרטור T " להיות פולינום מתוקן ממעלה מינימלית $f(X)$ כך ש- $f(T)(v) = 0$.

(א) הוכיחו קיום ויחידות של הפולינום המינימלי של וקטור v ביחס

לאופרטור T .

(ב) הוכיחו כי לכל וקטור v , הפולינום המינימלי של וקטור v ביחס

לאופרטור T מחלק את הפולינום המינימלי של T .