<u>תרגיל 9 באלגברה 2</u>

1) ל-$v,u \in \mathbb{R}^2$ נגדיר

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 \ .$$

(א) הראו שפונקציה זו מהווה מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$.

(ב) יהיו $u=(1,-3),\ \ v=(2,5)$. מצאו את $\langle u,v\rangle$ ואת $\|v\|$.

2) הראו שהפונקציות הבאות לא מהוות מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^3$:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_2x_3 + y_1x_2y_3$$

3) הוכיחו כי $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(B^TA)$ הינה מכפלה פנימית על $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4) יהיה V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F. הוכיחו את "זהויות הפולר-יזציה":

(א) אם $F=\mathbb{R}$ אז $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2)$

(ב) אם $F=\mathbb{C}$ אז

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i||v-iw||^2)$$

5) יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכיחו כי לכל $v,u \in V$ מתקיים

(א) "שוויון המקבילית":

$$\|v+u\|^2 + \|v-u\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2$$

(ב) $\|v+w\| \geq \Big|\|v\| - \|w\|\Big|$.

6) יהיה V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F ויהא $T\colon V\to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו או הפריכו:

(א) יהיה $v\in V$ כך שלכל $u\in V$ מתקיים $\langle v,u\rangle = 0$. אזי $v=0$.

(ב) יהיו $v,u\in V$ כך שלכל $w\in V$ מתקיים $\langle v,w\rangle = \langle u,w\rangle$. אזי $v=u$.

(ג) אם לכל $v,u\in V$ מתקיים $\langle T(v),u\rangle = 0$ אזי $T=0$.

(ד) אם לכל $v\in V$ מתקיים $\langle T(v),v\rangle = 0$ אזי $T=0$.