# חדו"א 1 להנדסת חשמל, בוחן אמצע סמסטר 1.
אניברסיטת בן גוריון

| | |
|---|---|
| מספר נבחן: ______________ | כללים: אסור לכתוב בצבע אדום. |
| מרצה: דמיטרי קרנר | הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, |
| מתרגלת: מרינה רפפורט | לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות |
| מספר הקורס: 201.1.9811 | ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). |
| תאריך: 02.05.2014 | בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות |
| משך הבחינה: שעתיים וחצי | לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת |
| חומר עזר: ללא חומר עזר, ללא מחשבון. | דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", |
| ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות) | "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..". |

1. (א) (14) תהי $a_n$ מקיימת: $|a_n| < 2$ וכן $|a_{n+2} - a_{n+1}| \le \frac{|a_{n+1}^2 - a_n^2|}{5}$. הוכיחו כי $a_n$ מתכנסת.
   (ב) (11) תהי $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$. האם הסדרה מתכנסת? (אם כן, מצאו את גבולה)

2. (א) (12) חשבו את הגבול (או הוכיחו כי אינו קיים) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^3}}$
   (ב) (13) נניח ש $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ו $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$. האם יכול להיות $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = 0$?
   (אם כן תנו דוגמא, אחרת הוכיחו שזה בלתי אפשרי.)

3. (א) (13) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת: $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$, כאשר $C > 0$ הנו קבוע. האם התנאי מבטיח את הרציפות במידה שווה?
   (ב) (12) האם פונקציה $f(x) = sin(x)(\sqrt{x} + \frac{1}{x})$ רציפה במידה שווה ב $x \in (1, 100)$? ב $x \in (0, 100)$? ב $x \in (100, \infty)$? ב $x \in (0, \infty)$? (הוכיחו או הפריכו)

4. (א) (12) הוכח שעבור $a > 1$ למשוואה $ln|x| + \frac{1}{x^3} = a$ קיימים לפחות שני פתרונות (שונים) ב $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (ב) (13) תהי $a_n$ סדרה עם שני גבולות חלקיים בלבד: $0$, $\frac{1}{2}$. הוכיחו כי סדרה $b_n = |a_n - \frac{1}{4}|$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

בהצלחה!

# Sketchy solutions of Midterm 1, Hedva1.EE, 201.1.981

02.05.2014 Ben Gurion University

(1) a. As $|a_n| \le 2$ we have: $|a_{n+1} - a_n| \le |\frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{5}| \le \frac{4|a_n - a_{n-1}|}{5}$. Therefore: $|a_{n+i} - a_{n+i-1}| \le (\frac{4}{5})^i |a_n - a_{n-1}|$. Thus

$$|a_{n+k} - a_n| = |\sum_{i=1}^{k} (a_{n+i} - a_{n+i-1})| \le |a_n - a_{n-1}| \sum_{i=1}^{k} (\frac{4}{5})^i \le (\frac{4}{5})^{n-1} \frac{(\frac{4}{5})^{k+1} - \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - 1} |a_2 - a_1|$$

Which means: $\lim\limits_{n,m\to\infty} (a_m - a_n) = 0$. Thus, by Cauchy's criterion for convergence, $a_n$ converges.

b. Note that $a_n \ge n \cdot min\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}}\} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \to \infty$. Thus $a_n$ does not converge to the finite limit.

(2) a. First change the variable: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^3}} \overset{t=1-x}{=} \lim\limits_{t\to 0} (1-t)^{\frac{1}{t(2-t+(1-t)^2)}}$. As was proved in the class: $\lim\limits_{t\to 0} (1-t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{e}$.

Further, as $a^x$ and $x^a$ are continuous functions, $\lim\limits_{t\to 0} (1-t)^{\frac{1}{t(2-t+(1-t)^2)}} = \Big( \lim\limits_{t\to 0} (1-t)^{\frac{1}{t}} \Big)^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{(2-t+(1-t)^2)}} = e^{-\frac{1}{3}}$.

b. Consider $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ and $g(x) = x^2$. Then: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \Big( (1 - \frac{1}{x})^x \Big)^x = 0$ .

(3) a. We prove that $f(x)$ is uniformly continuous. For any $\epsilon > 0$ and any $x \in \mathbb{R}$ take $\delta = \frac{\epsilon}{C}$. (Note that $\delta$ does not depend on $x$.) Then for any $y \in (x - \delta, x + \delta)$ one has: $|f(y) - f(x)| \le C|x - y| = \epsilon$. Q.E.D.

b. Note that $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, thus the function extends to a continuous function on $[0, \infty)$. In particular, by Cantor's theorem, the function is uniformly continuous on any interval $[0, M]$, $M > 0$.

The function is not uniformly continuous on any interval $(M, \infty)$. If it were, then the variation on the intervals $[\pi n, \pi(n+1)]$ would be bounded. But $\underset{[\pi n, \pi(n+1)]}{max} f(x) - \underset{[\pi n, \pi(n+1)]}{min} f(x) \ge \sqrt{\pi n} \to \infty$.

(4) a. Note that $f(x) = ln|x| + \frac{1}{x^3} - a$ is a continuous function and $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, while $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ and $f(1) = 1 - a < 0$. Thus, by the mean value theorem the equation $f(x) = 0$ has solutions both in $(-\infty, 0)$ and in $(1, \infty)$.

b. As the partial limits of $a_n$ are $0, \frac{1}{2}$, we can split the sequence $a_n$ into the two subsequences, $a_n^{(1)} \to 0$ and $a_n^{(2)} \to \frac{1}{2}$, so that every element of $a_n$ participates in one of them. Accordingly, $b_n$ splits into the two subsequences: $b_n^{(1)} = |a_n^{(1)} - \frac{1}{4}|$ and $b_n^{(2)} = |a_n^{(2)} - \frac{1}{4}|$. Each of them converges to $\frac{1}{4}$ and they together cover $b_n$. Thus $b_n \to \frac{1}{4}$.