חדו"א 1 להנדסת חשמל, בוחן אמצע סמסטר 2.
אוניברסיטת בן גוריון

מספר נבחן: ____________ מרצה: דמיטרי קרנר מתרגלת: מרינה רפפורט מספר הקורס: 201.1.9811 תאריך: 30.05.2014 משך הבחינה: שלוש שעות חומר עזר: ללא חומר עזר, ללא מחשבון. ניקוד: פתרו את כל השאלות (סה"כ 100 נקודות)	<u>כללים</u> : אסור לכתוב בצבע אדום. הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון, לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך). בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?", "אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של.."

1. (א) (10) באילו נקודות פונקציה $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ גזירה? חשבו את הנגזרת בקודות אלה.

   (ב) (15) האם פונקציה $f(x) = \frac{x^x}{1+x^x}$ רציפה במידה שווה ב $(0,10)$? ב $(10,100)$? ב $(100,\infty)$?

2. (א) (13) הוכיחו: $|arctan(e^x) - arctan(e^y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

   (ב) (12) פיתחו את $f(x) = sin(ax)cos(bx)$ לטור טיילור בנקודה $x = 0$.

3. (א) (12) מצאו את כל המשיקים לגרף של $f(x) = \frac{1}{x}$ העוברים דרך הנקודה $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

   (ב) (13) יהי $\mathbb{R} \ni \alpha > 10$. כמה פתרונות יש למשוואה $x^7 - \frac{7\alpha}{2}x^2 + 2 = 0$?

4. (א) (8) האם הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - sin(x)}{x^3}$ קיים? (אם כן חשבו אותו)

   (ב) (17) חקרו את פונקציה $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ (רציפות, גזירות, עליה/ירידה, קמירות, נקודות פיתול/min/max, אסימפטוטות). ציירו את הגרף.

בהצלחה!

<u>נוסחאות שימושיות</u>

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sin(\beta)$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) \mp sin(\alpha)sin(\beta)$$
$$cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos(\tfrac{\alpha+\beta}{2})cos(\tfrac{\alpha-\beta}{2})$$
$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2sin(\tfrac{\alpha+\beta}{2})sin(\tfrac{\alpha-\beta}{2})$$
$$sin(\alpha) \pm sin(\beta) = 2sin(\tfrac{\alpha\pm\beta}{2})cos(\tfrac{\alpha\mp\beta}{2})$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$, $\log_a b = \frac{ln(b)}{ln(a)}$, $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

פיתוח טיילור עם שארית בצורה של לגרנג': $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $|\theta - x_0| \leq |x - x_0|$.

טורי טיילור בסיסיים: $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ עבור $|x| < 1$,

$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ עבור $|x| < 1$, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{n!}$ עבור $|x| < 1$.

Sketchy solutions of Midterm2, Hedva2.ME, 20119721

30.05.2014 Ben Gurion University

(1) a. For $(x,y)\neq(0,0)$ the function is continuous being the composition of continuous functions. For $(x,y)=(0,0)$ we should check: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x) =?= f(0,0)$. Indeed (using the polar coordinates):

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = r(cos^3(\phi)+sin^3(\phi)) \to 0$$

b. First we compute the partial derivatives at the origin:

$$\partial_x f|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \partial_y f|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{1}{ln(3)}$$

To check the differentiability we consider the linear approximation near the origin: $f(x,y) = f(0,0)+\partial_x f|_{(0,0)}x + \partial_y f|_{(0,0)}y + r(x,y)$. We want to check whether the remainder vanishes fast enough: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =?= 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2\sqrt{2}+y^2 ln(3)} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{ln(3)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2 x ln^2(3) - yx^2 2}{\sqrt{2}ln(3)\sqrt{x^2+y^2}(x^2\sqrt{2}+y^2 ln(3))}$$

This limit does not exist. (e.g. check the expression along various lines through the origin). Thus the function is not differentiable at the origin.

(2) a. Define $F(x,y,z)=2xy+y^2z+4e^z$. Note that $\partial_z F = y^2+4e^z>0$ and $F(1,-2,0)=0$. By the implicit function theorem, the equation $F(x,y,z)=0$ has the unique differentiable solution $z(x,y)$, defined in some neighborhood of $(1,-2,0)$. Moreover, $\partial_x z = -\frac{2y}{y^2+4e^z}$ and $\partial_y z = -\frac{2x+2yz}{y^2+4e^z}$.

Thus $grad(z(x,y))|_{(1,-2,0)} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$. The directional derivative is $\partial_{\vec{v}} z|_{(1,-2,0)} = \frac{\vec{v}\cdot(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})}{||\vec{v}||}$. The value of the derivative is maximal (minimal) if the derivative is in the direction of $grad$ (or in the direction of $-grad$). Thus $max(\partial_{\vec{v}} z) = ||grad(z(x,y))|_{(1,-2,0)}|| = \frac{\sqrt{5}}{4}$ and $min(\partial_{\vec{v}} z) = -||grad(z(x,y))|_{(1,-2,0)}|| = -\frac{\sqrt{5}}{4}$.

b. The tangent plane to the graph of $z(x,y)$ at the point $(1,-2,0)$ is: $z = 0+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(y+2) = \frac{x}{2}-\frac{y}{4}-1$. The normal to this plane is $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-1)$.

(3) a. $grad(f) = (cos(x), sin(y)) = (0,0)$ implies: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\pi n$, for $k,n\in\mathbb{Z}$. The matrix of second derivatives:

$$\partial^2 f = \begin{pmatrix} -sin(x) & 0 \\ 0 & cos(y)\end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ y=\pi n}} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}, \quad det(\partial^2 f) = (-1)^{k+n+1}$$

If $k+n\in 2\mathbb{Z}$ then the points are the saddle points.
If $k+n\in 2\mathbb{Z}+1$, then one has local minima when $(k+1),n\in 2\mathbb{Z}$ and local maxima when $(k+1),n\in 2\mathbb{Z}+1$.

By the direct check: $f(\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi n) = (-1)^k-(-1)^n$. Note that $|sin(x)+cos(y)|\leq 2$. Thus the points with $(k+1),n\in 2\mathbb{Z}+1$ are the global maxima, while those with $(k+1),n\in 2\mathbb{Z}$ are the global minima.

b. First we check the critical points of $f(x,y)=sin(x^2-y^2)$ in the interior of $\mathcal{D}$. The condition $grad(f)=(0,0)$ gives: either $(x,y)=(0,0)$ or $cos(x^2-y^2)=0$. In the later case: $x^2-y^2=\frac{\pi}{2}+\pi k$. But lying in the domain means $x^2+y^2\leq\frac{\pi}{9}$, in particular: $|x^2-y^2|\leq x^2+y^2\leq\frac{\pi}{9}$. This contradicts $x^2-y^2=\frac{\pi}{2}+\pi k$, so $cos(x^2-y^2)$ does not vanish inside $\mathcal{D}$. Thus, the only point to check is: $(x,y)=(0,0)$. In this case $\partial^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$, i.e. this is a saddle point.

Now we check the boundary. It consists of the interval segment $(x+y=0)$ and the arc $(16x^2+9y^2=\pi)$.

First consider the min/max problem on the arc $g(x,y)=16x^2+9y^2=\pi$. The method of Lagrange gives: any critical point must satisfy $grad(f)\sim grad(g)$, i.e. $xycos(x^2-y^2)=0$. As above we get: $cos(x^2-y^2)$ does not vanish on the boundary of $\mathcal{D}$. Thus the points to check are: $(x,y)=(0,\frac{\sqrt{\pi}}{3})$, $(x,y)=(\frac{\sqrt{\pi}}{4},0)$.

The min/max on the interval $x+y=0$. In this case $sin(x^2-y^2)=0$, i.e. the function $f(x,y)$ vanishes on the whole interval.

Finally, we compare the value of the function at all the obtained points:

$$f(0,\frac{\sqrt{\pi}}{3}) = sin(-\frac{\pi}{9})<0, \quad f(\frac{\sqrt{\pi}}{4},0) = sin(\frac{\pi}{16})>0, \quad f(x,-x)=0$$

Therefore the absolute maximum of f on $\mathcal{D}$ is $sin(\frac{\pi}{16})$, while the absolute minimum is $-sin(\frac{\pi}{9})$.

(4) a. Note that the function is not differentiable at $x=0$, this line should be checked separately. For $x>0$: $grad(f) = (3+4x^3y^2, x^4 2y)$. Thus $grad(f)$ does not vanish for $x>0$. Similarly, for $x<0$: $grad(f)\neq(0,0)$. Thus one should only check the points $(0,y)$, i.e. the $\hat{y}$ axis. Note that $f(x,y)\geq 0$ and $f(0,y)=0$. Thus, each such point is the point of local (and global) minimum.

b. Using the chain rule one has: $grad(\phi)|_{(1,2,3)} = (8,11,2)$. Thus $grad(\phi)|_{(1,2,3)}\cdot(1,1,1)=21$.