חדו"א 1 להנדסת חשמל, דוגמא של בחינה.

אוניברסיטת בן גוריון

מספר נבחן:	____________	כללים: אסור לכתוב בצבע אדום.
מרצה:	דמיטרי קרנר	את כל התשובות צריכים לנמק.
מתרגלת:	מרינה רפפורט	הבודק רוצה לראות רק את הגרסה הסופית של הפתרון,
מספר הקורס:	201.1.9811	לא את כל נדודי הביניים. השתמשו בטיוטה לכל הנסיונות
תאריך:	04.07.2014	ההתחלתיים. הפתרון אמור להיות מסודר, מדויק (ולא ארוך).
משך הבחינה:	שלוש שעות	בזמן הבחינה מרצים/מתרגלים עונים רק על שאלות הקשורות
חומר עזר:	ללא חומר עזר, ללא מחשבון.	לניסוח של הבחינה. אנחנו לא עונים על שאלות כמו: "האם זאת
ניקוד:	פתרו את כל השאלות, (סה"כ 110 נקודות)	דרך נכונה?" , "באיזה משפט צריכים להשתמש כאן?",
		"אני שכחתי את הנוסחה/הניסוח של..".

1. (א) עבור אילו ערכים של a_1 הסדרה הבאה מתכנסת? $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$. (אם היא מתכנסת, מה הגבול?)

   (ב) חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_{10}^{x}\frac{e^{\sqrt{t}}}{t}dt\right)^2}{e^x}$.

2. (א) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^2\frac{x+1}{x^2-1}dx$ (אם הוא קיים)

   (ב) חשבו את הנפח של גוף סיבוב המתקבל ע"י סיבוב של התחום $\{0\le y\le x^{-2}|sin\frac{1}{x}|,\ 0<x<1\}$ סביב ציר $\hat{y}$.

3. (א) הוכיחו: $ln\frac{x_1+2x_2}{3}\ge ln(\sqrt[3]{x_1})+ln(\sqrt[3]{x_2^2})$ עבור $x_1,x_2>0$.

   (ב) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה ומקיימת $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. הוכיחו כי עבור כל מספר a קבוע: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+a)-f(x))=0$. האם $f(x)$ בהכרח חסומה?

4. (א) חקרו את הפונקציה $f(x)=x-2arctan(x)$ (תחום הגדרה, רציפות/גזירות, תחומי עליה/ירידה, קמירות, אסימפטוטות, נקודות מינ./מקס.) ציירו את הגרף.

   (ב) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2sin(\frac{1}{x})}{sin(x)}$

5. הוכיחו/הפריכו: אם $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות אז לכל $c\in\mathbb{R}$ קיימים $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

בהצלחה!

Answers

(1) a. $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{3+a_n}+\sqrt{3+a_{n-1}}}$. Note that for $n > 1$: $a_n > 0$. Thus for $n > 2$: $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{2\sqrt{3}}$. Now we can use the statement (proven in the class):
If $|a_{n+1} - a_n| \leq C|a_n - a_{n-1}|$ for some $0 \leq C < 1$ then the sequence converges. (This follows from Cauchy criterion.)
Once we know that the system converges, one can take the limit: $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{L+3}$. Thus $L = \frac{1+\sqrt{12}}{2}$. (Note that the limit does not depend on the value of a_1, and the convergence holds for any $a_1 \geq -3$).
b. Apply twice l'Hopital's rule.
Alternatively present the limit in the form $(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int \dots}{e^{\frac{x}{2}}})^2$ and apply l'Hopital just once.

(2) a. Note that the function goes to $\pm\infty$ as $x \to 1$. Thus we should check the convergence of the integrals $\int\limits_{1-\epsilon}^{1} (\dots)$ and $\int\limits_{1}^{1+\epsilon} (\dots)$. In both cases one compares to $\int \frac{dx}{d-1}$. Thus in both cases the integrals diverge. Therefore the initial $\int\limits_{0}^{2}(\dots)$ diverges as well.
b. Use the formula $Vol = 2\pi \int xf(x)dx$. To get: $Vol = 2\pi \int\limits_{0}^{1} x^{-2}|sin\frac{1}{x}|dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int\limits_{1}^{\infty} |sin(t)|dt$. The later integral diverges. Thus the body has no well defined volume.

(3) a. Follows from convexity of $f(x) = ln(x)$.
b. Apply Lagrange's theorem. Note that $f(x)$ is not nec. bounded, e.g. $f(x) = ln(x)$.

(4) b. The direct application of l'Hopital does not help here. Rather present the limit in the form:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)}xsin\frac{1}{x} = 1 \cdot 0$$

(5) A counterexample: $f(x) = x^3$ with $c = 0$.