חדו"א 1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל חזרה לפני בוחן ראשון (לא להגשה).

(1) (א) תהי $A=\{0.a_1a_2a_3\ldots \mid a_i\in\{1,2\}\}\subset[0,1]$ קבוצת כל המספרים הממשיים שבפיתוח עשרוני שלהם מופיעות רק ספרות 1,2. הוכיחו/הפריכו:

i. $max(A)$ קיים. (מצאו אותו.) ii. $min(A)$ קיים. (מצאו אותו.) iii. $A\cap\mathbb{Q}$ היא קבוצה סופית.

(ב) תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה שלא שואפת ל $\pm\infty$. הוכיחו או הפריכו:

i. הסדרה חסומה מלעיל ii. ישנה תת-סדרה חסומה iii. ישנה תת-סדרה שחסומה מלעיל

iv. הסדרה מתכנסת לגבול סופי

(2) האם הסדרות הבאות מתכנסות לגבול סופי? (אם כן, מצאו את הגבול)

i. $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, ii. $a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3}$, iii. $a_1=a>0$,$a_{n+1}=3\frac{a_n-1}{a_n+3}$,

iv. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}$, v. $b_1=0$,$b_n=\frac{1}{4(1-b_n)}$.

(3) (א) נתון כי מספרים a_1, ..., a_{n+1} מהווים סדרה חשבונית. הוכיחו: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

(ב) תהי a_n סדרה כלשהי. תנו דוגמא לסדרה b_n כך שכל $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ הם גבולות חלקיים של b_n.

(ג) תהי a_n סדרה כלשהי. תהי b_n סדרה שכל איבר בה הוא גבול חלקי של a_n. הוכיחו כי כל גבולות החלקיים של b_n הם גם גבולות חלקיים של a_n.

(ד) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נגדיר שתי סדרות: $x_1=a$, $y_1=b$, $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$. הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לאותו הגבול, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, שמקיים: $\sqrt{ab}\le L\le\frac{a+b}{2}$.

(ה) נניח שקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=L$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=L$ (הפרידו בין המקרים $L\neq 0$ ו $L=0$). האם הטענה ההפוכה נכונה?

(ו) תהי a_n סדרה כלשהי של ספרות, כלומר: $a_n\in\{0,1,2\ldots,9\}$. הוכיחו כי $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k}$ מתכנסת.

(ז) תהי a_n מתכנסת ו b_n חסומה. נניח שמתקיים: $b_{n+1}\le b_n+(a_{n+1}-a_n)$. הוכיחו ש b_n מתכנסת.

(ח) תהי a_n מוגדרת ע"י $a_{n+1}=cos(a_n)$, כאשר a_0 ממשי כלשהו. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

(ט) יהי $c\geq 0$ ונגדיר $x_1=1$, $x_{n+1}=c+\frac{x_n^2}{2}$. עבור איזה ערך של c הסדרה מתכנסת?

(4) נניח שהסדרות a_n, b_n מקיימות: $lim(a_n-b_n)=0$. הוכיחו/הפריכו:

(א) $lim(a_n)=lim(b_n)$ (לפחות במובן הרחב).

(ב) כל גבול חלקי של a_n הוא גם גבול חלקי של b_n.

(5) תהיינה a_n, b_n סדרות של מספרים אי-שליליים. הוכיחו:

(א) אם a_n מתכנסת אז $\overline{lim}(a_n+b_n)=lim(a_n)+\overline{lim}(b_n)$, $\overline{lim}(a_nb_n)=lim(a_n)\overline{lim}(b_n)$.

(ב) אם a_n חסומה ולכל סדרה b_n מתקיים $\overline{lim}(a_n+b_n)=\overline{lim}(a_n)+\overline{lim}(b_n)$, אז a_n מתכנסת.

(ג) $\underline{lim}(a_n)\cdot\underline{lim}(b_n)\le\underline{lim}(a_nb_n)\le\underline{lim}(a_n)\cdot\overline{lim}(b_n)$.

(ד) אם $\overline{lim}(\frac{1}{x_n})\overline{lim}(x_n)=1$ אז x_n מתכנסת.

(6) (א) נניח ש $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ו $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$. האם יכול להיות $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)}=0$? (אם כן-תנו דוגמא, אחרת הוכיחו שזה בלתי אפשרי.)

(ב) חשבו $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[k]{\prod\limits_{i=1}^{k}(x+a_i)}-x)$.

(ג) תנו דוגמא לפונקציה כך ש: $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni x\to\infty}f(x)=0$ אך $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ לא קיים.

(ד) תהי $f(x)$ מונוטונית בסביבה של $x=a$ ולא רציפה ב $x=a$. הוכיחו שגבולות $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ קיימים וסופיים.

(7) (א) תהיינה $[a,b]\xrightarrow{f,g}\mathbb{R}$ רציפות, נגדיר $h(x)=max(f(x),g(x))$. הוכיחו כי $h(x)$ רציפה.

(ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$. הוכיחו כי $f(x)=\alpha x$. (רמז: קודם מוכיחים עבור $x\in\mathbb{Q}$ ואחר כך משתמשים ברציפות.)

(ג) תהי $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$. האם ניתן להרחיב את תחום הגדרה של f ל $\mathbb{R}$ כולו כך שתתקבל פונקציה רציפה?

(ד) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}(a,b)$ פונקציה רציפה וחסומה. נניח שאי-אפשר להרחיב את תחום הגדרתה ל $(a,b]$ כך שתתקבל פונצקיה רציפה. הוכיחו או הפריכו:

(i) $f(x)$ מונוטונית ליד $x=b$.

(ii) $f(x)$ לא מונוטונית ליד $x=b$.

(iii) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ קיים לפחות במובן הרחב (סופי או אינסופי).

(iv) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ לא קיים אפילו במובן הרחב.

(8) (א) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}[0,\frac{\pi}{2}]$ פונקציה רציפה. נניח ש $f(0)\geq 0$, $f(\pi/2)\leq 1$. הוכיחו כי למשוואה $f(x)=sin(x)$ יש פתרון ב $[0,\frac{\pi}{2}]$.

(ב) נניח ש $\mathbb{R}\xrightarrow{f}[a,b]$ מקיימת: לכל $a<c<d<b$ התמונה $f([c,d])$ היא קטע סגור. האם $f(x)$ בהכרח רציפה?

(ג) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}(a,b)$ רציפה. הוכיחו שלכל $a<x_1<\cdots<x_n<b$ ולכל $\{\beta_i\geq 0\}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=1$, קיימת נקודה $c\in[x_1,x_n]$ כך ש: $f(c)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)$.

(ד) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}(a,b)$ רציפה ומקבלת רק ערכים רציונליים. הוכיחו כי f קבועה.

(ה) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}[-1,1]$ רציפה ומקיימת: $f(-1)=f(1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0\in[-1,1]$ כך ש: $f(x_0)=f(x_0+1)$.

(ו) תהי $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית. הוכיחו שהיא רציפה אמ"ם התמונה $f([a,b])$ היא קטע סגור.

(9) הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{Z}$ למשוואה $tan(x)=-x$ יש שורש יחיד בקטע $(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n)$. נסמן את השורשים כ x_n. הוכיחו: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\pi n)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to-\infty}(x_n-\pi n)=\frac{\pi}{2}$

(10) תהי f רציפה ומחזורית. הוכיחו שהיא רציפה במידה שווה.

$May\ the\ force\ be\ with\ you$