חדו"א 1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015.(ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 0.

התרגיל הינו תרגיל רענון (של חומר של ביה"ס). הוא לא להגשה.

(1) עבור מספרים שלמים $0 \le k \le n$ נגדיר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. בידקו את התכונות הבסיסיות:

i. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, ii. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$, iii. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, iv. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(2) הוכיחו את הנוסחאות הבאות (ע"י פתיחת סוגרים או לפי כל שיטה אחרת):

i. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, ii. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,

iii. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ iv. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

v. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, vi. $(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$

(3) לפשט את הביטויים

i. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ii. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}$, iii. $\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)} - \frac{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)}$

(4) פתרו את אי-השיוויונות

i. $-x^2 + 4x - 3 \ge 0$, ii. $||x+1| - 2| \le 3$, iii. $sin(x) \ge \frac{1}{2}$.

(5) יהיו a, b שני מספרים. הוכיחו: $\Big||a| - |b|\Big| \le |a+b| \le |a| + |b|$.

(6) ציירו גרפים של הפונקציות הבאות. (שימו לב: כאן אין צורך לחשב נגזרות/לעשות חקירה של פונקציה. הגרפים מתקבלים בקלות מהגרפים של פונקציות אלמנטריות: e^x, $sin(x)$, $ln(x)$, ..) כאן n הנו מספר טבעי.

(א) i. $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$, ii. $f(x) = x^{2n+1}$, iii. $f(x) = x^{2n}$, iv. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(ב) i. $f(x) = |x|$, ii. $f(x) = |1-x| + |1+x|$, iii. $f(x) = ||x-2| - 2|$

(ג) i. $f(x) = 3e^{x-1}$, ii. $f(x) = e^x + e^{-x}$, iii. $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$, iv. $f(x) = ln(|x| - 2)$,

(ד) i. $f(x) = -2sin(x + \frac{\pi}{6})$, ii. $f(x) = |tan(x)|$, iii. $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$

(7) (א) תהי a_n סדרה חשבונית: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$. חשבו a_{25}, $a_{3n} - a_{2n}$. חשבו את הסכום של 30 איברים הראשונים: $\sum_{n=1}^{30} a_n$.

(ב) תהי b_n סדרה הנדסית: $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 3b_n$. חשבו b_{25}, $b_{3n} - b_{2n}$. חשבו את הסכום של 5 איברים הראשונים: $\sum_{n=1}^{5} b_n$.

(8) יהיו $a, b > 0$. הוכיחו את אי-השוויון ממוצעים: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

(9) הוכיחו באינדוקציה:

i. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ii. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sqrt{n}$,

iii. $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, כאן $x_1, \ldots, x_n \ge 0$.

בפרט, עבור $x_1 = x_2 = \cdots = x_n > 0$, מקבלים $(1+x)^n \ge 1 + nx$