חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015.(ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 1.

1. לימדו בעל פה את ה"אותיות החשובות": $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \delta, \lambda, \pi, \tau, \phi, \varphi, \psi, \omega$.
2. נתונה קבוצה $S = \{2, 8, 3, 4\} \subset \mathbb{R}$.
   (א) מיינו את כל התת קבוצות שלה (רמז: יש סה"כ 16 קבוצות, כולל $S, \varnothing$.)
   (ב) תארו (במילים או בצורה מפורשת אחרת) את הקבוצות $S \cup \varnothing$, $S \cap \varnothing$, $S \cup \mathbb{R}$, $S \cap \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus S$, $S \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $S \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$.
3. הוכיחו את הטענות הבאות אודות קבוצות.
   (א) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (ב) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. (א) נתונים מספרים ממשיים x, y המקיימים $y - x > 1$. הוכיחו שקיים מספר שלם n כך ש- $x < n < y$.
   (ב) הוכיחו כי המספרים הבאים אינם רציונליים: $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
   (ג) האם הסכום (או הכפל) של שני מספרים רציונליים הינו רציונלי?
   (ד) האם הסכום (או הכפל) של שני מספרים אי-רציונליים הינו אי-רציונלי?
   (ה) האים קיימים $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ המקיימים: $a + b \in \mathbb{Q}$ וגם $ab \in \mathbb{Q}$?
   (ו) נתונים $0 \neq x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. הוכיחו כי $x \pm y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ אינם מספרים רציונליים.
   (ז) הוכיחו כי בין שני מספרים רציונליים שונים תמיד נמצאים מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי.
   (ח) הוכיחו כי בין שני מספרים רציונליים שונים יש אינסוף מספרים רציונליים ואינסוף מספרים אי-רציונליים.
5. הוכיחו את האי-שיוויונות הבאים: i. אם $a > 0$ אז $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ii. אם $0 < a < b$ אז $b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} > a$.
6. הוכיחו שאם $x \in \mathbb{R}$ מקיים $0 \leq x < c$ לכל מספר ממשי חיובי c, אז $x = 0$.
7. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו/הפריכו: i. אם $sup(A) < \infty$ אז $A \subseteq (-\infty, sup(A)]$. ii. אם $inf(A) > -\infty$ אז $A \subseteq [inf(A), \infty)$. ii. אם $sup(A) < \infty$, $inf(A) > -\infty$ אז $A \subseteq [inf(A), sup(A)]$.
8. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נגדיר $(-A) = \{-a | a \in A\}$. הוכיחו:
   i. $sup(-A) = -inf(A)$, ii. $inf(-A) = -sup(A)$, iii. $max(-A) = -min(A)$ (אם קיים).
9. נתון ש- x הנו חסם מלרע של הקבוצה $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו כי $x = \inf A$ אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $y \in A$ המקיים $x \leq y < x + \epsilon$.
10. חשבו sup, inf של הקבוצות הבאות. לאילו קבוצות קיימים min/max?
    i. $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} | 0 \neq n \in \mathbb{N}\right\}$, ii. $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m^2} | 0 \neq m, n \in \mathbb{N}\right\}$, iii. $C = \left\{\frac{m}{2^n} | m, n \in \mathbb{N}\right\}$,
    iv. $D = \left\{\frac{1}{2^n} | n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 - \frac{1}{3^n} | n \in \mathbb{N}\right\}$, v. $E = \{x^4 < 17 | \; x \in \mathbb{Q}\}$
11. תהיינה S, T קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים כך ש- $\mathbb{R} = S \cup T$ ובנוסף לכל $t \in T$ ולכל $s \in S$, מתקיים: $s < t$. הוכיחו כי קיים מספר ממשי יחיד α כך ש- $T \supseteq (\alpha, \infty)$ ו- $S \supseteq (-\infty, \alpha)$.
12. הוכיחו שלכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$, $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$