חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 10.

(1) (א) תהי $[0,1] \xrightarrow{f(x)} \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, $f(0)=0=f(1)$ ו $\min_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. הוכיחו כי $f''(c)\geq 8$ בנקודה $c\in(0,1)$.

(ב) תהי $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_n\neq 0$. נניח שלמשוואה $f(x)=0$ קיימים בדיוק n פתרונות ממשיים שונים. הוכיחו כי לכל $1\leq k\leq n$ למשוואה $f^{(k)}(x)=0$ ישנם בדיוק $(n-k)$ פתרונות ממשיים שונים.

(ג) תהי $f(x)$ גזירה n פעמיים בקטע (a,b) ומקיימת $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{n+1})$ עבור הנקודות $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}<b$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש: $f^{(n)}(c)=0$.

(ד) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים. נניח שעבור קבוע $L>0$ וכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $|f^{(n)}(x)|\leq L$. הוכיחו כי אם בנוסף $f(\frac{1}{n})=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אז $f(x)\equiv 0$.

(2) הוכיחו או הפריכו:

(א) אם ל f יש מקסימום מקומי ב $x=x_0$ אז $f(x)$ מונוטונית לפחות באחד מהקטעים $(x_0-\epsilon,x_0)$, $(x_0,x_0+\epsilon)$, עבור $\epsilon>0$ מספיק קטן. (רמז: התבוננו ב $f(x)=-x^2sin^2(\frac{1}{x})$)

(ב) אם ל f יש מקסימום ב $x=x_0$ אז לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ קיים (במובן הרחב).

(ג) אם $\mathcal{D}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ מקיימת $f'(x)>0$ עבור כל $x\in\mathcal{D}$ אז f עולה ב $\mathcal{D}$. כלומר עבור כל $x_1<x_2$ מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$. (רמז: התבוננו במקרה $\mathcal{D}=(a,b)\cup(c,d)$.)

(ד) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה, אז בין כל שתי נקודות max ישנה נקודת min. האם זה נכון גם לפונקציות לא רציפות?

(ה) תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות ב $x=x_0$. נניח ש x_0 היא נקודת max. אז $f''(x_0)<0$.

(ו) אם $f'(x_0)>0$ ו $f(x)$ גזירה בסביבה (קטנה) של $x=x_0$. אז קיימת סביבה (קטנה) של $x=x_0$ שבה $f(x)$ עולה. (רמז: $f(x)=\begin{cases}10x^2sin\frac{1}{x}+x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.)

(ז) אם $f(x)$ עולה ממש וגזירה בקטע (a,b) אז $f'(x)>0$ בקטע הזה.

(ח) אם $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ עולה ממש וגזירה אז $f'(x)>0$ פרט אולי למספר סופי של נקודות.
(רמז: התבוננו ב $f(x)=\begin{cases}e^{sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$.)

(3) הוכיחו: i. $xln(x)\leq\frac{x^2+1}{2}$, ii. $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}$ עבור $x\geq 0$.

(4) מצאו ומיינו את נקודות הקיצון של פונקציות הבאות: i. $f(x)=sin(x)+cos(x)$, ii. $f(x)=sin(cos(x))$, iii. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}-sin(x)$, iv. $f(x)=\frac{ln^2(1+x)}{x}$, v. $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$, vi. $f(x)=x^m(x-1)^n$, $m,n\in\mathbb{N}$. vii. $f(x)=sin(sin^6(x))$ (רמז: כדי למיין את הנקודות החשודות כדאי לפתח לטיילור).

(5) הוכיחו כי המרחק בין נקודה (x_0,y_0) לישר $y=ax+b$ הנו: $\frac{\sqrt{|ax_0+b-y_0|}}{\sqrt{1+a^2}}$.

(6) (א) מצאו תחומי קמירות ונקודות פיתול של: i. $f(x)=x^a$, $a>0$, ii. $f(x)=x^aln(x)$, $a>0$, iii. $f(x)=x+x^{\frac{5}{3}}$, iv. $f(x)=x^4+x^3-18x^2+24x-12$, v. $f(x)=x^x$

(ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ויורדת ו $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קעורה. הוכיחו כי $f(g(x))$ קמורה.

(ג) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וגזירה פעמיים ב (a,b), ו $f''(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$. הוכיחו כי:
i. $\max_{x\in[a,b]}(f)=max\{f(a),f(b)\}$, ii. $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, לכל $a\leq x_1<x_2\leq b$.

(ד) הוכיחו כי $cos(\frac{7x_1+x_2}{8})\geq\frac{7cos(x_1)+cos(x_2)}{8}$, עבור $x_1,x_2\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

(7) (א) מצאו את כל האסימפטוטות לגרפים של פונקציות: i. $f(x)=\frac{sin(x-1)}{x^2-1}$, ii. $f(x)=e^xcos(3x)$, iii. $f(x)=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$, iv. $f(x)=2x+arctan\frac{x}{2}$, v. $f(x)=xln(e+\frac{1}{x})$,

(ב) נניח ש $[a,\infty)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה ובעלת אסימפטוטה משופעת עבור $x\to\infty$. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה במידה שווה.

(ג) עבור פולינום $p(x)$ נגדיר $f(x)=\frac{p(x)}{x+1}$. נניח ש $f(0)=0$, ובנוסף $f(-2)=4$ היא נקודת קיצון וקיימת אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ עבור $x\to\infty$. מצאו את $p(x)$.

(ד) נניח ש $f:\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים ובעלת אסימפטוטה משופעת עבור $x\to\infty$. האם $f'(x)$ בהכרח חסומה? ואם בנוסף $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$?

(8) (א) חקרו את הפונקציה (רציפות, גזירות, רציפות במ"ש, עליה/ירידה, min/max , קמירות, אסימפטוטות) וציירו גרף שלה
i. $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$, ii. $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ iii. $f(x)=max(|2x|,|1+x|)$, iv. $f(x)=e^{\frac{1}{sin(x)}}$

(ב) חקרו את הפונקציה $y(x)=(1-x^a)^{\frac{1}{a}}$, $x\in[0,1]$, $a>0$. ציירו את העקום $|x|^a+|y|^a=1$. (הבדילו בין מקרים $a\in(0,1)$, $a\in(1,\infty)$.) הוכיחו כי עבור $a\to\infty$ העקום "שואף" לעקום $\max\{|x|,|y|\}=1$.
הוכיחו כי עבור $a\to 0^+$ העקום "שואף" לעקום $\{xy=0,\ x\in[-1,1],\ y\in[-1,1],\ x^2+y^2\neq 0\}$.