

חזו"א 1 להנדסת חשמל, 201-1-9811

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 11.

(1) חישבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int \cos^2(x) dx$.i, $\int (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$.ii, $\int \frac{(x+2)(x^3-1)}{\sqrt{x}} dx$.iii, $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$.iv (שימו לב למקרים $m = n$)
 .v $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ (שימו לב למקרים $a \neq b, a = b$)
 (ב) ניתן להיעזר באינטגרציה בחלקים) $\int x^n \ln(x) dx$.i, $n \neq -1$, $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.ii, $\int \arctan(x) dx$.iii
 .iv $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$, .v $\int \frac{e^x(1-x) dx}{x^2}$, .vi $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ (רמז: אינטגרציה בחלקים פעמיים) .vii $\int \arcsin(x) dx$

(ג) אינטגרלים של פונקציה רציונלית: .i $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$, .ii $\int \frac{xdx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$, .iii $\int \frac{dx}{3x^2+2x+5}$
 .iv $\int \frac{x^4+3}{x^4-1} dx$, .v $\int \frac{dx}{(x^2+5)(x^2-1)}$, .vi $\int \frac{x^5-x+1}{(x^2-4)x} dx$, .vii $\int \frac{x^2+x-1}{x^2(x-2)} dx$, .viii $\int \frac{xdx}{1+x^4}$
 (ד) אינטגרלים מהצורה $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ - פונקציה רציונלית. ניתן להשתמש בהצבות טריגונומטריות ($t = a \cos(x)$, $t = a \tan(x)$, $t = \frac{a}{\cos(x)}$, ...)

.i $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$, .ii $\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$, .iii $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-a^2}}$, .iv $\int \frac{x^2 dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^3}$, .v $\int x \sqrt{x^2-9} dx$
 .vi $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, .vii $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$, .viii $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$
 (ה) $\int \tan(x) dx$.i, $\int \frac{\sin(x) dx}{\cos^4(x)}$.ii, $\int \frac{\sin(2x) dx}{\sqrt{1-\cos^4(x)}}$.iii, $\int \frac{dx}{\sin(x)\cos(x)}$.iv (רמז: $\frac{1}{\cos(x)\sin(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)\tan(x)}$)

.v $\int \frac{dx}{\sin(x)}$, .vi $\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2}$, .vii $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$, .viii $\int \sin 5x \sin 6x dx$
 (ו) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.i, $\int \frac{5x-1}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx$.ii, $\int \frac{(2x+1) dx}{\sin^2(x^2+x+3)}$.iii, $\int \frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx$.iv, $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$.v
 .vi $\int \sqrt{2+x+x^2} dx$, .vii $\int \frac{x+1}{\cos^2 x} dx$, .viii $\int e^x \ln(e^x+1) dx$, .ix $\int \frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} dx$ ($t^2 = x+1$)
 .x $\int \frac{dx}{x(\ln x)^a}$, $x = e^t$, .xi $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$, .xii $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}} dx$, .xiii $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$

(2) מצאו נוסחה רקורסיבית ל $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

(3) הוכיחו כי אם $\int f(x) dx = F(x) + C$ אז $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

(4) הראו כי בעזרת ההצבה $x = 2 \arctg(t)$, $x = tg \frac{x}{2}$, $t = tg \frac{x}{2}$, מקבלים $tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, $cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
 השתמשו בהצבה זו כדי לחשב $\int \frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)+3}$