חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 12.

(1) (א) האם הפונקציות הבאות אינטגרביליות? i. $f(x)=\begin{cases} sin(\frac{1}{x^2}),\ x\neq 0 \\ 0,\ x=0\end{cases}$, ii. $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$,

iii. $f(x)=sin(ln(x^2+arctan(\sqrt{5-x})))$, iv. $f(x)=\begin{cases} 1,\ x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N} \\ 0,\ n\notin\mathbb{N}\end{cases}$

(ב) הוכיחו כי פונקצית Dirichlet, $\chi(x)=\begin{cases} 1,\ x\in\mathbb{Q} \\ 0,\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, אינה אינטגראבילית באף קטע.

(ג) הוכיחו: אם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ אז גם $|f(x)|$ אינטגרבילית ו $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

(2) חשבו: i. $\int\limits_1^e xln(x)dx$, ii. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, iii. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx$, iv. $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{11}dx$, v. $\int\limits_0^{\sqrt{x}} t\cdot arctan(t)dt$,

vi. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^e |ln(x)|dx$, vii. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{cos^5(x)dx}{cos^5(x)+sin^5(x)}$, viii. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2(x)dx}{\sqrt{x}}$, ix. $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$, x. $\int\limits_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x^4-1}$, xi. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x+x\ln^2(x)}dx$.

(3) (א) הוכיחו כי $\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int\limits_0^1 x^m(1-x)^n dx$

(ב) הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה: $\int\limits_0^\pi f(sin(x))dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi xf(sin(x))dx$ (רמז: הצבה x − $t=\pi$.)

(ג) נסמן $J_m=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m(x)dx$. הוכיחו: $J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}$ (אינטגרציה בחלקים). קבלו מכאן:

$J_{2m}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdots 2}\frac{\pi}{2}$, $J_{2m+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdots 1}$.

(4) הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $f(x)$, $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות אז גם $f(x)+g(x)$ אינטגרבילית. מה לגבי $f(x)^2$, $f(x)g(x)$?

(רמז: $f\cdot g=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$.)

(ב) $f(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית אמ"ם $|f(x)|$ אינטגרבילית.

(ג) אם $\int\limits_a^b f^2(x)dx=0$ אז $f(x)=0$ בקטע $[a,b]$. (רמז: כאן $f(x)$ לא בהכרח רציפה.)

(ד) אם $f(x)\geq 0$ ב $[a,b]$, אינטגרבילית ו $f(x)\not\equiv 0$, אז $\int\limits_a^b f(x)dx>0$.

(ה) אם $[a,b]\xrightarrow{f}[0,+\infty)$ אינטגרבילית ויש אינסוף נקודות שבהן $f(x)>10^{10}$ אז $\int\limits_a^b f(x)dx>0$.

(ו) אם $[a,b]\xrightarrow{f}[0,+\infty)$ רציפה ו $f(x)\not\equiv 0$, אז $\int\limits_a^b f(x)dx>0$.

(ז) אם $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ אינטגרבילית ו $g(x)=f(x)$ פרט למספר סופי של נקודות, אז גם $g(x)$ אינטגרבילית ו $\int\limits_a^b f(x)dx=$

$\int\limits_a^b g(x)dx$.

(ח) אם $f(x)$ פונקציה זוגית ורציפה אז $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$. אם $f(x)$ אי-זוגית ורציפה אז $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=0$.

(5) (א) חשבו: i. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{ln(n+k)-ln(n)}{n}$, ii. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2 arctan\frac{k}{n}}{n^3}$, iii. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$

(ב) חשבו: i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x (arctan(t))^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$, ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-arcsin(x)}{\int\limits_0^x ln(1+t^2)dt}$, iii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_{sin(sin(x))}^{sin(x)} e^{t^2}dt}{x^2}$, iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{tan(x)} tsin(at)dt}{x-sin(x)}$

v. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^x f(t)g(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$, כאשר $f(x)$, $g(x)$ רציפות ו $f(0)>0$, vi. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_{sin(x)}^{tan(x)} ln(17t^3)dt}{x}$