חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2014. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 14.

(1) בדקו את ההתכנסות או ההתבדרות של האינטגרלים הבאים: i. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, ii. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, iii. $\int\limits_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$,
iv. $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$, v. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}dx$, vi. $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, vii. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, viii. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2-1}$,
ix. $\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, x. $\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^\beta}$, xi. $\int\limits_0^1 x^\alpha(1-cos(x-1))^\beta dx$, xii. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ln(sin(x))}{\sqrt{x}}dx$, xiii. $\int\limits_{-\infty}^\infty sin(x)dx$,
xiv. $\int\limits_2^\infty f(x)dx$, כאשר $f(x)=\begin{cases} 2^n(x-n+\frac{1}{2^n}),\ x\in[n-\frac{1}{2^n},n],\ n\in\mathbb{N} \\ 2^n(n+\frac{1}{2^n}-x),\ x\in[n,n+\frac{1}{2^n}],\ n\in\mathbb{N} \\ 0,\ \text{אחרת} \end{cases}$

(2) בדקו את ההתכנסות בהחלט/בתנאי:

(א) i. $\int\limits_0^\infty \frac{sin(t)dt}{t^\alpha}$, $\alpha\geq 0$, ii. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}cos(x)}{x+100}dx$, iii. $\int\limits_0^\infty cos(x^2)dx$, iv. $\int\limits_0^\infty x^\alpha cos(e^x)dx$, v. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{x}}}$.

(ב) $\int\limits_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2\rfloor}dx$. רמז: כאן התבוננו בקטעים $n\leq x^2<n+1$. תרגמו את הבעיה להתכנסות של סדרה $a_N=\sum\limits_{n=1}^N(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. התבוננו בתתי-סדרות a_{2N}, a_{2N+1}. הוכיחו כי הן מונוטוניות וחסומות.

(3) חשבו (אם התשובה היא סופית) i. $\int\limits_0^1 ln(x)dx$, ii. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, iii. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ctg(x)dx$, iv. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}dx$

(4) הוכיחו/הפריכו (רמז: חלק מדוגמאות נגדיות מופיעות בשאלות 1,2):

(א) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $f(x)$ רציפה אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

(ב) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $f(x)\geq 0$ רציפה אז $f(x)$ חסומה ב $[1,\infty)$.

(ג) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט ו $f(x)$ גזירה אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

(ד) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $f(x)$ רציפה במידה שווה, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

(ה) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ אז $\int\limits_1^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

(ו) אם $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ מתכנס ו $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ אז $L=0$.

(5) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה, נניח ש $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2f(x))=1$. חשבו $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f(nx)dx$.

(6) חשבו את השטח החסום ע"י עקום $xy^2=8-4x$, ציר $\hat{x}$ ואסימפטוטה של העקום.

(7) תהי $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|sin(\pi x)|(1+e^x)}}$, $x>0$. ציירו את הגרף, בפרט מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה. הוכיחו כי עבור כל קטע סופי האינטגרל $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס.

(8) חקרו את הפונקציות. (חסומה? רציפה? רציפה במ"ש? גזירה? עליה/ירידה, אסימפטוטות, מינ./מקס., קמירות, גרף)

i. $f(x)=\int\limits_0^{e^x}\frac{sin(t)}{t}dt$, $x\in\mathbb{R}$, ii. $f(x)=\int\limits_0^{x^{\frac{2}{a+2}}}\sqrt{1+t^a}dt$, $x\in[0,\infty),\ a>0$ קבוע, iii. $f(x)=\int\limits_0^{sin(x)}e^{t^2}dt$.

(רמז: כדי לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to+\infty}(\int\limits_0^{x^{\frac{2}{a+2}}}\sqrt{1+t^a}dt-\frac{2x}{a+2})$ הציגו $\int\limits_0^{x^{\frac{2}{a+2}}}t^{\frac{a}{2}}dt=\frac{2x}{a+2}$.)