חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015.(ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 2.

(1) נתונה סידרה $a_n = \sqrt{n} \cdot sin(\frac{\pi n}{2})$.

(א) האם הסידרה עולה/יורדת? (לפחות החל ממקום מסוים?) חסומה (מלעיל/מלרע)? מתכנסת?

(ב) האם יש לה תת-סדרה עולה? תת-סדרה יורדת? תת-סדרה חסומה? תת-סדרה מתכנסת?

(2) הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת וחשבו את הגבול:

i. $a_n = \frac{5n^2+n\cos(n)}{n^2+4}$, ii. $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$, iii. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$, iv. $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$,

v. $a_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, vi. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^3+n^4}-\sqrt{n}}$, vii. $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ (רמז: $n < (1.5)^n$ עבור n מספיק גדול).

(3) הוכיחו כי הסדרות הבאות אינן מתכנסות: i. $a_n = 2n^2 - n$, ii. $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$, iii. $a_n = \binom{n}{3}$,

iv. $a_n = (1 + cos(\pi n))\frac{n}{n+1}$, v. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ זוגי} \\ \frac{a_n}{2}, & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$

(4) הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) אם הסדרה חסומה אז היא מתכנסת.

(ב) אם הסדרה מתכנסת (לגבול סופי) אז היא חסומה.

(ג) אם ל $\{a_n\}_n$ יש תת סדרה חסומה אז $\{a_n\}_n$ מתכנסת.

(ד) אם $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ סדרות מתכנסות אז גם $\{a_n + b_n\}_n$ מתכנסת.

(ה) אם הסדרות $\{a_n + b_n\}_n$, $\{a_n b_n\}_n$ מתכנסות אז לפחות אחת מהסדרות $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ מתכנסת.

(ו) אם הסדרות $\{a_n\}_n$, $\{a_n b_n\}_n$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_n$ מתכנסות ו $a_n > 0$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$ אז גם $\{b_n\}_n$ מתכנסת.

(ז) תהי $\{a_n\}_n$ מתכבסת. נניח ש $a_n > 0$ אז גם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) > 0$.

(ח) אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ אז $a_n > 0$ עבור $n \gg 1$.

(ט) אם סדרה של מספרים רציונלים (אי-רציונלים) מתכנסת אז גם הגבול הוא מספר רציונלי (אי-רציונלי).

(י) a_n מתכנסת אם ורק אם $|a_n|$ מתכנסת ו $|\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$.

(יא) אם לסדרה a_n יש גבול סופי, אז הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ מתכנסת.

(5) הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ מתכנסת למספר 1.

(6) נתונה סדרה a_n, נתבונן בסדרה $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

(א) הוכיחו כי אם a_n מתכנסת, אזי b_n מתכנסת לאותו גבול.

(ב) מצאו דוגמא של סדרה a_n מתבדרת כך ש- b_n מתכנסת.

(7) הוכיחו כי הסדרות הבאות מונוטוניות וחסומות ולכן מתכנסות. עבור מקרים i. ii. חשבו את הגבול של הסדרה.

i. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, ii. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n}$,

iii. $a_{n+1} = 2^n sin(\frac{\pi}{2^n})$, (רמז: $|sin(x)| < |x|$), iv. $a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$,

v. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ כאן רשמו גם נוסחה רקורסיבית $(recursive\ formula)$ עבור a_n.

(8) מצאו את הגבולות או הוכיחו כי אינם קיימים (את כל התשובות צריך לנמק):

i. $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n)$, $0 < a < 1$, ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $a > 1$, iii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 1$, iv. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, v. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{\frac{n}{2}}}$,

vi. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a > b > 0$, vii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{100}}$, viii. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.