חדו"א 1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015.(ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 3.

(1) מצאו את הגבול של הסדרה $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2-a_n$.

(2) מצאו (כמה שיותר) טעויות בשורות הבאות (נלקח מהבחינות)

(א) $a_n\to a$ אם קיים $\epsilon>0$ כך שעבור כל $\delta\geq 0$ מתקיים $|a_n-a|<\epsilon$.

(ב) $a_n\to\infty$ אם עבור $n\gg 0$ a_n מתחיל להיות ∞.

(ג) אם $a_n\to a$ אז החל ממקום מסוים היא מתכנסת בצורה מונוטונית.

(3) חשבו את הגבולות הבאים: i. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$, ii. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^3+3n+5})^{n^3-7n}$,

iii. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, iv. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$, v. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{ln(2n)}{ln(n)})^{ln(n)}$.

(4) הוכיחו כי הסדרות הבאות שואפות ל ∞. i. $a_n=\frac{5^n-2^n}{n+3^n+4^n}$, ii. $a_n=\frac{\sqrt{2n^5+3n^2+1}}{n^2+4n-3}$

(5) (א) תנו הגדרה מדויקת (בעזרת ϵ,n,N) למקרה: $a_n\to-\infty$.

(ב) הוכיחו (בעזרת ההגדרה) ש $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$.

(6) יהי $L>0$. נניח שהסדרה a_n מקיימת : $a_{n+1}-a_n\to L$. הראה כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

(7) (א) נניח ש $a_n\to L$ ו $b_n\to L$. נגדיר סדרה חדשה: $c_{2n}=a_n$, $c_{2n-1}=b_n$. הוכיחו ש $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$.

(ב) נתונה סדרה a_n. נניח שתתי סדרות a_{2n+15}, $a_{2n+3}^2-a_{2n+4}^2$, $a_{2n+3}^3-a_{2n+4}^3$, a_{n^3} מתכנסות. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

(8) מצאו את כל גבולות החלקיים של הסדרות: i. $x_n=\frac{a+b+(-1)^n(a-b)}{2}$, ii. $a_n=sin(\frac{\pi n}{4})$, iii. $a_n=nsin(\frac{\pi n}{2})$

(9) מצאו דוגמא לסדרה

(א) שאין לה גבולות חלקיים (סופיים).

(ב) שיש לה בדיוק 7 גבולות חלקיים.

(ג) שיש לה בדיוק גבול חלקי (סופי) אחד, אך היא לא מתכנסת.

(ד) שיש לה אינסוף גבולות חלקיים.

(ה) שכל המספרים הטבעים הם גבולות החלקיים שלה.

(10) הוכיחו כי לסדרות a_n ו $\sqrt[n]{n}\,a_n$ יש אותם גבולות חלקיים.

(11) הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)

(א) נניח שסדרה a_n מקיימת: עבור כל $k\in\mathbb{N}$ קבוע מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$. אז a_n מתכנסת.

(ב) אם a_n,b_n מתכנסות במובן הרחב (לגבולות לא בהכרח סופיים) אז a_n+b_n מתכנסת במובן הרחב.

(ג) אם a_n,b_n מתכנסות במובן הרחב (לגבולות לא בהכרח סופיים) אז a_nb_n מתכנסת במובן הרחב.

(ד) נניח ש a הוא גבול חלקי של a_n ו b הוא גבול חלקי של b_n. אז $a+b$ הוא גבול חלקי של a_n+b_n.

(ה) אם a_n סדרה עולה ויש לה תת סדרה מתכנסת (לגבול סופי) אז a_n מתכנסת.

(ו) תהי a_n סדרה עולה. נניח שכל תת-סדרה שלה מתכנסת לגבול סופי. אז a_n מתכנסת לגבול סופי.

(12) הוכיחו את הטענות הבאות

(א) נניח שהסדרה a_n מקיימת $|a_{n+1}-a_n|\leq\frac{1}{n(n+1)}$ לכל n. אז הסדרה מתכנסת. (רמז: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.)

(ב) יהי $0<\alpha<1$ קבוע כלשהו. נניח שהסדרה a_n מקיימת $|a_{n+2}-a_{n+1}|\leq\alpha|a_{n+1}-a_n|$. אז הסדרה מתכנסת.

(ג) יהיו $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ קבועים. נגדיר סדרה על ידי $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$. הראה כי הסדרה מתכנסת.

(13) נגדיר $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

(א) הוכיחו ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

(ב) הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$. (רמז: הוכיחו ש: $a_n<3\sqrt{n}$.)

(14) נניח ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

(א) הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=\infty$.

(ב) הראו כי קיימת סדרה b_n כך ש: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\infty$.