

חזו"א 1 להנדסת חשמל, 201-1-9811

אביב 2015. ד.קרנר, מ.רפפורט

תרגיל בית מס' 4.

(1) הוכיחו/הפריכו (כאן $\underline{\lim} = \liminf$, $\overline{\lim} = \limsup$):
 i. $\overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) \geq \overline{\lim}(a_n + b_n)$
 ii. $\underline{\lim}(a_n) + \underline{\lim}(b_n) = \underline{\lim}(a_n + b_n)$
 iii. $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}(a_n)$
 iv. נניח $\underline{\lim}(a_n) > 0$ אז $\underline{\lim}(a_n) \cdot \underline{\lim}\frac{1}{a_n} = 1$

(2) (א) מצאו את תחום ההגדרה של פונקציות הבאות:
 i. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
 ii. $f(x) = \sqrt{2+3x-x^2}$
 (ב) תהי $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 < x < 1$. מצאו את תחום הגדרה של:
 i. $f(\frac{x+1}{x-1})$
 ii. $f(\sin(x))$
 iii. $f(e^x)$
 iv. $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \log(\sqrt{1-4x^2})$
 v. $f(x) = \arccos(3x+1)$

(3) מצאו את התמונה של פונקציות הבאות:
 i. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 ii. $f(x) = \sqrt{2+3x-x^2}$
 iii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $0 < x < 3$
 iv. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
 v. $f(x) = [x]$ (החלק השלם)
 vi. $f(x) = \{x\} := x - [x]$

(4) נתונות פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$. תארו את הפונקציות הבאות (בפרט תחום הגדרה ותמונה שלהן):
 i. $f \circ f$
 ii. $f \circ f \circ \dots \circ f$ (k פעמים)
 iii. $f \circ g$
 iv. $g \circ f$
 v. $g \circ g$
 vi. $f \circ g \circ g$

(5) (א) האם הפונקציות הבאות הן חסומות?
 i. $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
 ii. $f(x) = 3 + 4\sin(2x)$
 iii. $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$

(ב) הוכיחו/הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):
 i. $\sup(f+g) = \sup(f) + \sup(g)$
 ii. $\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$

(6) בדקו את זוגיות הפונקציות:
 i. $f(x) = x^2 + \sin^2(x)$
 ii. $f(x) = \log(\frac{1-x}{1+x})$
 iii. $f(x) = a^x + a^{-x}$, $a > 0$
 iv. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(7) הוכיחו כי ניתן לייצג כל פונקציה המוגדרת בתחום $(-a, a) \subset \mathbb{R}$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית. האם ניתן להציג אותה גם כמכפלה של פונקציה זוגית ואי-זוגית?

(8) (א) הראו כי הפונקציות הבאות הן מחזוריות ומצאו את מחזורם (הקטן ביותר):
 i. $f(x) = \{x\} = x - [x]$
 ii. $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(3x)$
 iii. $f(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$
 iv. $f(x) = \sin^2(x)$
 (ב) האם לכל פונקציה מחזורית יש המחזור הקטן ביותר? (רמז: התבוננו בפונקצית דיריכלה, Dirichlet).
 (ג) האם הפונקציות $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$, $f(x) = \sin(x^2)$ הן מחזוריות?

(9) הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) אם $\inf_{x \in (a,b)} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$ אז $f(x)$ קבועה בקטע (a, b) .

(ב) אם $f(x)$ עולה ו $g(x)$ יורדת בקטע (a, b) אז $f(x) + g(x)$ מונוטונית בקטע (a, b) .

(ג) אם $f(x)$ עולה ו $g(x)$ יורדת בקטע (a, b) אז $f(x)g(x)$ מונוטונית בקטע (a, b) .

(ד) אם $f(x)$ עולה ו $g(x) > 0$ יורדת בקטע (a, b) אז $\frac{f(x)}{g(x)}$ מונוטונית בקטע (a, b) .

(10) ציירו גרפים של פונקציות הבאות:
 i. $f(x) = [x]$ (החלק השלם)
 ii. $f(x) = (-1)^{[x]}$
 iii. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
 iv. $f(x) = \{x\} := x - [x]$
 v. $f(x) = (-1)^{[x]}\{x\}$
 vi. $f(x) = \arcsin(x)$
 vii. $f(x) = \arccos(x)$

viii. $f(x) = \arctan(x)$
 $sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(11) אילו מהפונקציות הבאות הן חז"ע? על? חז"ע ועל?

i. $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{2}) : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$
 ii. $f(x) = \frac{x+1}{3} : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$

(12) תהי $f(x)$ פונקציה הפיכה. נניח שהיא עולה/יורדת. הוכיחו שגם הפונקציה ההופכית שלה היא עולה/יורדת.