חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 5.

(1) (א) ציירו את הגרפים של: i. $f(x)=(-1)^{[x]}\{x\}$, ii. $f(x)=(-1)^{[x]}\{x\}+\frac{1-(-1)^{[x]}}{2}$, (כאן $\{x\}=x-[x]$)
iii. $f(x)=\frac{\pi}{2}-arccos(2x)$, iv. $f(x)=arcsin\frac{1-x}{4}$,
v. $f(x)$ היא פונקציה מחזורית, עם מחזור $T=1$, המוגדרת ב $[0,1)$ ע"י $f(x)=x^2$.

(ב) בהינתן גרף של $f(x)$ תארו איך נראה הגרף של: i. $|f(x)|$, ii. $\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$, iii. $\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$.

(2) (א) השתמשו בזהויות טריגונומטריות כדי למצוא min/max של פונקציות הבאות: i. $f(x)=sin^2(x)$,
ii. $f(x)=sin(x)+cos(x)$, ii. $f(x)=a\cdot sin(x)+b\cdot cos(x)$

(ב) מצאו את המחזור (הקטן ביותר) של פונקציה $f(x)=|sin(x)|+|cos(x)|$ והשתמשו בזהויות טריגונומטריות כדי לצייר את הגרף שלה.

(3) חשבו את הגבולות (או הוכיחו כי אינם קיימים). נמקו היטב את כל הצעדים.

i. $\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2-6}$, ii. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$, iii. $\lim_{x\to1}\frac{5x^2+xcos(2x)}{e^x+2}$, iv. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2x^2+cos(3x^3)}{4x+5x^2+sin(6x^3)}$, v. $\lim_{x\to\infty}cos(2\pi x)$,

vi. $\lim_{x\to0}\frac{1}{sin(x)}$, vii. $\lim_{x\to0^+}\frac{cos(x)}{x^3}$, viii. $\lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$, xii. $\lim_{x\to0}sin(\frac{1}{x})$,

xiii. $\lim_{x\to3^+}\chi(x)$, $\lim_{x\to\sqrt{3}^-}\chi(x)$ עבור $\chi(x):=\begin{cases}1: & x\in\mathbb{Q}\\ 0: & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

(4) חשבו את הקבועים a,b מתוך התנאי: $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$.

(5) הוכיחו את הטענה: אם $\lim_{x\to a}f(x)=0$ ו $g(x)$ חסומה בסביבה של $x=a$ אז $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$. (ניתן להשתמש בהגדרת הגבול לפי Heine או לפי Cauchy.)

(6) תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית, נניח שהגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים עבור כל a. הוכיחו: אם $f(x)$ לא קבועה, אז $\lim_{x\to0}f(\frac{1}{x})$ לא קיים.

(7) תנו הגדרה (מדויקת) ל: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. (גם לפי Heine גם לפי Cauchy.)

(8) הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

(א) אם הגבולות $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$ קיימים אז לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$ קיים.

(ב) אם הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ לא קיים אז לפחות אחד הגבולות החד-צדדיים, $\lim_{x\to a^+}f(x)$, $\lim_{x\to a^-}f(x)$ לא קיים.

(ג) אם $f(x)$ עולה וחסומה בסביבה של $x=a$ אז הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים.

(ד) אם $f(x)$ לא חסומה בכל סביבה של $x=a$ אז הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ לא קיים (או לא סופי).

(ה) אם $\lim_{x\to a}f(x)=L\geq0$ אז קיימת סביבה (מנוקרת) של $x=a$ שבה $f(x)\geq0$.

(ו) אם $\lim_{x\to a}f(x)=L>0$ אז קיימת סביבה (מנוקרת) של $x=a$ שבה $f(x)>0$.

(ז) אם $\lim_{x\to a}f(x)=L$ ו $f(x)>0$ בסביבה (מנוקרת) של $x=a$ אז $L>0$.

(ח) אם $\lim_{x\to a}f(x)\geq\lim_{x\to a}g(x)$ אז קיימת סביבה (מנוקרת) של $x=a$ שבה $f(x)\geq g(x)$.

(ט) אם $\lim_{x\to a}g(x)=b$ ו $\lim_{x\to b}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to a}f(g(x))=L$.

(9) חשבו את הגבולות הבאים (או הוכיחו כי אינם קיימים): i. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)(1+2x)-1}{x}$, ii. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$,

iii. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, iv. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$, v. $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$, vi. $\lim_{x\to\pi}\frac{sin(x)}{x-\pi}$, vii. $\lim_{x\to0^-}\frac{sin(|x|)}{x}$,

viii. $\lim_{x\to0}\frac{sin(|x|)}{x}$, ix. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos^2(x)}{x^2+x^3}$, x. $\lim_{x\to\infty}x\big(ln(1+x)-ln(x)\big)$, xi. $\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x)}{x}$,

xii. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+tg(x)}{1+sin(x)}\right)^{\frac{1}{sin(x)}}$, xiii. $\lim_{x\to\infty}\big(1+sin(\pi x)\big)^{cot(\pi x)}$.

(10) הוכיחו את משפט Weierstraß: אם $f(x)$ מונוטונית וחסומה בסביבת $x=x_0$ אז קיימים $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$. האם בהכרח קיים $\lim_{x\to x_0}f(x)$?