חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 6.

(1) בדקו רציפות (רציפות חד צדדית) של הפונקציות הבאות. i. $f(x)=\begin{cases} xsin\frac{1}{x} : \ x\neq 0 \\ 0 : \ x=0 \end{cases}$, ii. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} : \ x\neq 0 \\ 0 : \ x=0 \end{cases}$,
iii. $f(x)=\begin{cases} \frac{sin(x)}{|x|} : \ x\neq 0 \\ 1 : \ x=0 \end{cases}$, iv. $f(x)=\begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x^2} : \ x\neq 0 \\ \frac{1}{3} : \ x=0 \end{cases}$, v. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1} : \ x>0 \\ cos(sin(x)) : \ x\leq 0 \end{cases}$,
vi. $f(x)=x[\frac{1}{x}]$, vii. $f(x)=\{x\}(-1)^{[x]}+\frac{1-(-1)^{[x]}}{2}$.

(2) האם ניתן להרחיב את תחום הגדרה של הפונקציה ל $\mathbb{R}$ כולו כך שתהיה רציפה? i. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$, ii. $f(x)=\frac{1}{x}$,
iii. $f(x)=\frac{tg(x)}{x}$, iv. $f(x)=\frac{1-cos(x)}{x^2}$, v. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$ vi. $f(x)=(1+sin(x))^{ctan(2x)}$.

(3) תהי $f(x) : \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בתחום הגדרתה. תהי a_n סדרה בתחום הגדרה של $f(x)$. נניח ש a_n מתכנסת לגבול סופי. האם סדרה $f(a_n)$ בהכרח מתכנסת? לפחות במובן הרחב?

(4) הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית)
(א) אם $f(x)\cdot f(x)$ רציפה בכל נקודה אז גם $f(x)$ רציפה.
(ב) אם $f(x)g(x)$, $f(x)+g(x)$ הן פונקציות רציפות אז לפחות אחת מ $f(x)$, $g(x)$ רציפה.
(ג) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$. אם $f(f(x))$ רציפה אז $f(x)$ רציפה לפחות בנקודה אחת.
(ד) אם $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ מונוטונית אז יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות.
(ה) אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ אז היא רציפה לפחות בסביבה קטנה של x_0.
(ו) אם $f(x)$ מקיימת את המשוואה $f(x)^2=f(x)$ (עבור כל x בתחום הגדרתה) אז היא רציפה.
(ז) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה אז היא חסומה.
(ח) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה אז ניתן להרחיב את תחום הגדרה ולהגדיר אות $f(x)$ בצורה רציפה ב $[a,b]$.
(ט) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז ניתן להרחיב את תחום הגדרה ולהגדיר אות $f(x)$ בצורה רציפה ב $[a,b]$.
(י) אם $f(x):\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ רציפה ומקבלת ערכים 1 ו -1 , אז היא מקבלת גם כל ערך בקטע $[-1,1]$.
(רמז: בדקו מקרה כאשר $\mathcal{D}$ הוא איחוד זר של קטעים.)
(יא) אם $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ חסומה אז היא מקבלת min/max ב $[a,b]$.
(יב) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה מונוטונית וחסומה אז היא מקבלת min/max ב (a,b).
(יג) אם $\mathcal{D}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה והפיכה אז הפונקציה ההופכית שלה גם רציפה. (רמז: בדקו מקרה: $\mathcal{D}$ איחוד זר של קטעים)

(5) מצאו דוגמא לפונקציה חח"ע ועל, $f : [0,1]\to[0,1]$, שמקיימת את התנאים: $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. האם הדוגמא שמצאתם רציפה?

(6) (א) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. הוכיחו שקיים $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(f(x))$.
(ב) תהי $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח שמתקיים: $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$. הוכיחו שכל ערך של $f(x)$, פרט אולי לערך אחד ,מתקבל לפחות פעמים.

(7) תהי $(0,2)\xrightarrow{f}(0,1)$ פונקציה רציפה ועל, כלומר $f(0,1)=(0,2)$. נגדיר: $A=\{x\in(0,1)|\ f(x)>1\}$. הוכיחו כי לקבוצה A אין min ואין max.

(8) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה ומחזורית: $f(x+T)=f(x)$. הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש: $f(x_0+\frac{T}{2})=f(x_0)$.

(9) (א) הוכיחו שלמשוואה $x2^x=1$ קיים פתרון יחיד.
(ב) הוכיחו שלפולינום ממעלה אי-זוגית תמיד קיים שורש.

(10) בדקו את הרציפות במידה שווה של פונקציות הבאות: i. $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, ii. $f(x)=xsin(x)$, $x\in[1,+\infty)$,
iii. $f(x)=xsin(x)$, $x\in[0,1000)$, iv. $f(x)=x+sin(x)$, $x\in\mathbb{R}$, v. $f(x)=sin(\frac{1}{x})$, $x\in(0,1)$,
vi. $f(x)=sin(\frac{1}{x})$, $x\in(1,\infty)$, vii. $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$ viii. $f(x)=ln(x)$, $x\in[1,\infty)$,
ix. $f(x)=sin(x^2)$, $x\in(-100,100)$, x. $f(x)=sin(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$.