חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 7.

(1) הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $f(x)$ רציפה במ"ש בקטעים $(a,b]$, $[b,c)$. אז היא רציפה במ"ש בקטע (a,c).

(ב) אם $f,g:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ רציפות במ"ש אז גם $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f^2(x)$ רציפות במ"ש.

(ג) אם $f(x)$ רציפה במ"ש אז היא חסומה.

(ד) אם $f(x)$ רציפה וחסומה אז היא רציפה במ"ש.

(ה) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ומחזורית אז היא רציפה במ"ש.

(ו) אם f רציפה במ"ש ו g רציפה אך לא במ"ש אז $f(x)\pm g(x)$ לא רציפה במ"ש. מה לגבי $f(x)g(x)$?

(ז) אם $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה במ"ש אז גם $f(f(x))$ רציפה במ"ש.

(ח) תהי $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, כאן (a,b) קטע סופי או אינסופי. אם $f(x)$ רציפה במ"ש בכל קטע (סופי) $[x_1,x_2]$, $a<x_1<x_2<b$, אז היא רציפה במ"ש ב (a,b).

(ט) אם $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $(a+\epsilon,b-\epsilon)$, $\epsilon>0$ אז היא רציפה ב $[a,b]$.

(י) אם $(a,\infty)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה במ"ש אז או קיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (סופי או אינסופי) או $f(x)$ מונוטונית עבור $x\gg 0$.

(יא) כדי להוכיח רציפות במ"ש צריכים להבין הגדרה של רציפות במ"ש.

(יב) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה וניתנת להרחבה בצורה רציפה ל $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ אז היא רציפה במ"ש.

(2) הוכיחו: אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה וגבולות $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ קיימים וסופיים, אז $f(x)$ רציפה במ"ש ב (a,b).

(3) תהי $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ המקיימת $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$. האם זה מבטיח רציפות במ"ש?

(4) האם $f(x)=sin(x)(\sqrt{x}+\frac{1}{x})$ רציפה במ"ש ב $x\in(0,1)$? ב $x\in(1,\infty)$?

(5) מצאו טעויות בציטוטים הבאים (בחינות משנים קודמות)

(א) אם $f(x)$ רציפה ורוצים להוכיח כי למשוואה $f(x)=0$ יש פתרון, אז ישנן a,b כך ש $f(a)<0$, $f(b)>0$.

(ב) אם $f(x)$ רציפה ורוצים להוכיח כי היא מתכנסת במ"ש אז ניתן להניח באינדוקציה כי $f(x)\ge 0$.

(ג) אם $a_n\to L$ אז $a_n=L$ עבור $n\gg 0$, (על פי משפט שלמדנו בכיתה).

(ד) אם ל a_n יש רק שני גבולות חלקיים, ± 1, אז $a_{2n}\to 1$, $a_{2n+1}\to -1$ (או להיפך).

(ה) אם $f(x)$ רציפה אז לכל $\epsilon>0$ ולכל $\delta>0$ מתקיים $|x-y|<\delta$ אם $|f(x)-f(y)|>\epsilon$.

(ו) אם $a_n\to 0$ ו $b_n\to 0$ וכך הלאה אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n+\cdots)=0$

(ז) אם $\mathcal{D}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה ו $f(1)f(-1)<0$ אז לפי משפט שלמדנו בכיתה קיים c כך ש $f(c)=0$. (כאן $\mathcal{D}$ הנו תחום הגדרה.)

(6) חשבו נגזרות של פונקציות הבאות i. $f(x)=2^{tg\frac{1}{x}}$, ii. $f(x)=log_{\phi(x)}\psi(x)$, iii. $f(x)=arccos(x)$, iv. $f(x)=arctan(x)$, v. $f(x)=\frac{ln^x(x)}{x^{ln(x)}}$, vi. $f(x)=(sin(x))^{cos(x)}$, vii. $f(x)=arctg(\sqrt{x^2-1})-\frac{ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

(7) (א) עבור איזה ערך של a העקומות $y=ax^2$, $y=ln(x)$ משיקות?

(ב) מצאו את כל המשיקים ל $y=x^2$ העוברים דרך הנקודה $(-3,8)$.

(ג) חשבו את הזוויות בין עקומות $y=sin(x)$, $y=cos(x)$ בנקודות החיתוך שלהן. (כלומר את הזווית בין המשיקים.)

(8) בדקו גזירות של הפונקציות הבאות. חשבו $f'(x)$ (אם היא קיימת). האם $f'(x)$ היא פונקציה רציפה?

i. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{1+ln|x|}: & x\neq 0\\ 0: & x=0\end{cases}$, ii. $f(x)=\begin{cases}x^2sin(\frac{1}{x}): & x\neq 0\\ 0: & x=0\end{cases}$, iii. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}: & x\neq 0\\ 0: & x=0\end{cases}$

iv. $f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$, v. $f(x)=arcsin(cos(x))$.

(9) תהי $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2014)$. חשבו $f'(0)$.

(10) הוכיחו: i. $2arctan(x)-arctan(\frac{2x}{1-x^2})\equiv\pi$, $x>1$. ii. $arctan(x)+arctan\frac{1-x}{1+x}\equiv\frac{\pi}{4}$, $x>-1$.

iii. $arctan(x)\equiv arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (רמז: בדקו כי הנגזרת המתאימה מתאפסת זהותית והשוו את הביטויים בנקודה הנוחה)