חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 8.

(1) חשבו גבולות (ניתן להשתמש בכלל לופיטל) i. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{ln(x)+x-1}$, ii. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$, iii. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^{x^x}-1)$, iv. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$, v. $\lim\limits_{x\to0}(ctg(x)-\frac{1}{x})$, vi. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{2}-arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$, vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}arctan(x))^x$.

(2) מצאו α שעבורו הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}+e^{-x}-2}{x^3}$ קיים וסופי. (וחשבו את הגבול)

(3) האם הטענה נכונה: "אם $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=L<\infty$ ו $f(x)$ גזירה אז $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{2x}=L$."

(4) הוכיחו/הפריכו

(א) אם $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה וזוגית (אי-זוגית/מחזורית/חסומה) אז $f'(x)$ היא אי-זוגית (זוגית/מחזורית/חסומה).

(ב) אם $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|$ עבור כל $x,y\in\mathbb{R}$ וקבוע $0<C\in\mathbb{R}$ אז $f(x)$ גזירה.

(ג) אם $|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^\alpha$, עבור קבועים $\alpha>1$, $C>0$ וכל $x,y\in\mathbb{R}$, אז $f(x)$ קבועה.

(ד) אם $f(x)$ רציפה במידה שווה אז היא גזירה.

(ה) אם $f:[a,\infty)$ גזירה ו חסומה אז היא רציפה במ"ש.

(ו) אם ל $f(x)$ יש נגזרת חסומה בתחום (a,b) (סופי או אינסופי) אז $f(x)$ רציפה במ"ש.

(ז) אם $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה במידה שווה וגזירה, אז $f'(x)$ חסומה.

(ח) $f(x)=x^2(\frac{\pi}{2}-arctan(x))$ רציפה במ"ש בקטע $[0,+\infty)$.

(ט) אם $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$ אז $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

(י) אם $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ אז $f'(x)$ חסומה עבור $x\gg0$. או לפחות $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{e^x}=0$.

(יא) אם $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ אז עבור כל קבוע a מתקיים: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+a)-f(x))=0$. האם $f(x)$ בהכרח חסומה?

(יב) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אז $f'(x)$ חסומה בכל קטע סופי $[a,b]$.

(יג) תהי $f(x)$ בעלת נגזרת חסומה ב $[1,\infty)$. אז $\frac{f(x)}{x}$ חסומה ב $[1,\infty)$.

(יד) אם $f(x)$ גזירה ב $x=a$ אז היא בהכרח גזירה בסביבה (קטנה) של $x=a$. לפחות רציפה בסביבה קטנה.

(טו) אם $f(x)$ גזירה בסביבה של $x=a$ ו $f'(a)>0$ אז $f(x)$ עולה בסביבה (קטנה) של $x=a$.

(5) (א) הוכיחו כי לכל אחת מהמשוואות הבאות קיים פתרון יחיד:

i. $2x+sin(x)+a=0$ ii. $x+e^x=1$ ii. $2^x+3^x=10$ ii. $x^5+4x^3+1=0$

(ב) נתון: $c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$. הוכיחו כי למשוואה $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$ קיים פתרון בקטע $[0,1]$.

(ג) תהי $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ רציפה, גזירה ב (a,b) ומקיימת: $f(a)=0=f(b)$. הוכיחו כי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ למשוואה $\alpha f(x)+f'(x)=0$ קיים לפחות פתרון אחד בקטע (a,b).

(6) הוכיחו (בעזרת משפט Lagrange): i. $|sin(x_1)-sin(x_2)|\le|x_1-x_2|$, ii. אם $0<b<a$ אז $\frac{a-b}{a}<ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$, iii. $(x-y)py^{p-1}<x^p-y^p<(x-y)px^{p-1}$ עבור $p>1$, $x>y>0$, iv. $|arctan(x)-arctan(y)|\le|x-y|$, v. $|arctan(e^x)-arctan(e^y)|\le\frac{|x-y|}{2}$.

(7) (א) תהי $(0,\infty)\xrightarrow{f}\mathbb{R}_+$ גזירה. הוכיחו כי לכל $1<n\in\mathbb{N}$ קיים $n-1<c<n+1$ כך ש: $\sqrt{\frac{f(n+1)}{f(n-1)}}=e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

(ב) תהי $f(x)=|x-1|$. הראו כי לא קיימת $x_0\in[0,3]$ כך ש $f'(x_0)=\frac{f(3)-f(0)}{3}$. האם יש כאן סתירה למשפט $Lagrange$?

(ג) תהי $(a,b)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה. האם לכל $c\in(a,b)$ קיימים $x_1<c<x_2$ כך ש: $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$?

(ד) תהי $(a,\infty)\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty}f=\lim\limits_{x\to a^+}f$. הוכיחו כי קיים $c\in(a,\infty)$ כך ש $f'(c)=0$.

(ה) הוכיחו כי לפולינום $x^{2n+1}+ax^2+b$ קיימים לכל היותר 3 שורשים.

(ו) הראו כי לכל a למשוואה $2x+sin(x)+a=0$ קיים פתרון והוא יחיד.

(8) תהי $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ גזירה ברציפות ו $|f'(x)|<1$. הוכיחו: i. $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$ עבור קבוע $0\le k<1$. ii. למשוואה $f(x)=x$ יש לכל היותר פתרון אחד בקטע $[a,b]$.

(9) הוכיחו: i. $x\ge sin(x)\ge\frac{2}{\pi}x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, ii. $cos(x)\ge1-\frac{x^2}{2}$, iii. $(x+1)ln(x)\ge2(x-1)$, $x\ge1$, iv. $x>ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, $x>0$, v. $2x\cdot arctan(x)\ge ln(1+x^2)$.