חדו"א1 להנדסת חשמל, 201-1-9811.

אביב 2015. (ד.קרנר, מ.רפפורט)

תרגיל בית מס' 9.

(1) (א) הוכיחו $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

(ב) חשבו $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}$ עבור פונקציות הבאות: i. $f(x) = x^\alpha$, ii. $f(x) = sin(x)$, iii. $f(x) = sin^2(x)$, iv. $f(x) = e^x sin(x)$, v. $f(x) = xsin(x)$, vi. $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, vii. $f(x) = x^n e^x$.

(2) (א) פיתחו לטור טיילור (סביב $x=0$): i. $f(x) = ln(x+a)$, ii. $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, iii. $f(x) = sin(x+a)$

(ב) השתמשו בפיתוחים ידועים (של e^x, $sin(x)$, $ln(1+x)$,...) כדי לקבל טורי טיילור של i. $f(x) = e^{x^3}$, ii. $f(x) = sin(x^2+a)$, iii. $f(x) = arctan(x)$

(ג) כתבו נוסחת טיילור i. $f(x) = ln(\frac{sin(x)}{x})$ עד $o(x^4)$, ii. $f(x) = sin^2(x) - x^2 e^{-x}$ עד $o(x^6)$,

(ד) הוכיחו כי אם $f''(a)$ קיימת אז $f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

(ה) תהי $f(x)$ גזירה n פעמים ברציפות. נניח ש $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. חשבו $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x^n}$.

(ו) מצאו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $x = \alpha sin(x) + \beta tan(x) + o(x^4)$. (כאן $f = o(x^n)$ מסמן: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$.)

(3) חשבו גבולות (האם כלל לופיטל עוזר כאן? לפעמים כדאי להשתמש בפיתוח טיילור)

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}$, ii. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ln(x)}}{x}$, iii. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sin\frac{1}{x}}{sin(x)}$, iv. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, v. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - ctg(x))$,

vi. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)\sqrt{1+x^2}}{tg^4(x)}$, vii. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$, viii. $\lim_{x\to 0} \frac{sin(tan(x))-tan(sin(x))}{x^4}$.

(4) (א) הוכיחו כי פונקציה $f(x) = \alpha sin(x) + \beta cos(x)$ מקיימת משוואת הגלים $f^{(2)}(x) + f(x) = 0$.

(ב) נגדיר $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(hyperbolic\ cosine)$, $sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(hyperbolic\ sine)$.

(i) הוכיחו: $cosh(x) = cosh(-x)$, $sinh(x) = -sinh(-x)$, $cosh(x)^2 = 1 + sinh(x)^2$, $cosh(x)' = sinh(x)$, $sinh(x)' = cosh(x)$.

(ii) הוכיחו כי $f(x) = \alpha sinh(x) + \beta cosh(x)$ מקיימת $f^{(2)}(x) - f(x) = 0$.

(iii) פיתחו $cosh(x)$, $sinh(x)$ לטור טיילור. (השוו לטורי טיילור של $sin(x)$, $cos(x)$.)

(5) (א) אילו מהפונקציות הבאות גזירות פעמיים ברציפות? (באילו נקודות?)

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 ln(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+x)}{x}, & -1 < x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

(ב) תהי $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ גזירה פעמיים, $g(0) = 0 = g'(0)$, $g''(0) = 3$. האם $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} : & x \neq 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$ גזירה פעמיים?

(ג) נגדיר $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} : & x \neq 0 \\ 0 : & x = 0 \end{cases}$. הוכיחו כי עבור כל $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. הוכיחו כי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים ו $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. מהו טור טיילור של $f(x)$? האם $f(x)$ שווה לטור טיילור שלה?

(6) חשבו בקירוב i. $\sqrt{e}$ בדיוק של 10^{-3}, ii. $sin(1°)$ בדיוק של 10^{-8}.

(7) הוכיחו או הפריכו:

(א) אם קיימת $f'(x_0)$ אז $f(x)$ בהכרח רציפה בסביבה (קטנה) של $x = x_0$.

(ב) אם קיימת $f'(x_0)$ אז $f(x)$ בהכרח גזירה בסביבה (קטנה) של $x = x_0$.

(ג) אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה אז היא גזירה פרט לאולי מספר סופי של נקודות.

(ד) אם ל $f(x)$ קיימת נגזרת מסדר n אז $f^{(n)}(x)$ רציפה.

(ה) אם ל $f(x)$ קיימות נגזרות מכל הסדרים, אז $f^{(n)}(x) = 0$ עבור $n \gg 0$.

(ו) אם $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים וכל הנגזרות מתאפסות ב $x = 0$ אז $f(x)$ היא קבועה.

(ז) אם $f(x)$ גזירה ב $(-\infty, \infty)$ אז $f'(x)$ רציפה.

(8) כמה פתרונות יש למשוואה (עבור $a \in \mathbb{R}$): i. $xe^{\frac{2}{x}} = a$, ii. $x - 2arctan(x) = a$, iii. $x^3 + px + q = 0$ (כאן הבדילו בין מקרים $27q^2 + 4p^3 \lessgtr 0$)