

חזו"א 2 למכונות, 201-1-9721

אביב 2015. תרגיל בית מס' 1.5 (מסכם).

1. (א) בדקו את ההתכנסות של הטורים הבאים. ציינו איפה ההתכנסות בהחלט ואיפה היא בתנאי.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+10)\ln(n)} - \frac{1}{\ln^n(n)} \right) .c \quad , \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n^{100})} - \frac{1}{\ln(n^{100}+1)} \right) .b \quad , \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^{100})} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^{100}+1)} .a \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5/2)^n n!}{n^n} .f \quad , \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n+100\sin(n^2)} .e \quad (עבור אילו $s, t \in \mathbb{R}$ הטור מתכנס?) .d \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln^t(n)} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{2n^2}\right) .h \quad , \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} .g \end{aligned}$$

(ב) מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים. בדקו איפה ההתכנסות בהחלט/בתנאי.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n .a \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^n}{n} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n^2} \right) x^n .d \quad , \sum_{n=100}^{\infty} \frac{(n+2)^n (2x-1)^n}{2^n (x+3)^n} .c \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} .b \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2\sin(x))^n}{n^2+300} .e \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} .i \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} x^n .h \quad , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} .g \quad , \sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{n^3}}{n!} .f \end{aligned}$$

(ג) פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור (ליד נקודה $x = 0$). מצאו את תחום ההתכנסות של הטור, בדקו איפה

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} .c \quad , f(x) = \sin^2(x) .b \quad , f(x) = \ln \frac{1}{6-5x+x^2} .a \\ & f(x) = (x - \tan(x)) \cos(x) .h \quad , f(x) = \arctan(x^3) .e \quad , f(x) = \sin(1-x) \cdot \cos(1+x) .d \end{aligned}$$

2. הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית):

$$(א) \text{ אם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס אז גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ מתכנס.}$$

$$(ב) \text{ אם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ מתכנס אז גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס.}$$

$$(ג) \text{ אם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס אז גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^4}{\ln(n+100)} \text{ מתכנס.}$$