

# חזר"א 2 למכונות, 201.1.9721

אביב 2015. תרגיל בית מס' 7.2.

- (1) (א) מצאו ומיינו את כל נקודות הקיצון (ב  $\mathbb{R}^2$ ) של הפונקציות הבאות:  
i.  $f(x, y) = e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y}$ . ii.  $f(x, y) = |3x| + x^4 y^2$ . iii.  $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ .  
iv.  $f(x, y) = \sin(x) - \cos(y)$ .  
(ב) הוכיחו כי לפונקציה  $f(x, y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y$  יש אינסוף נקודות מקסימום (מקומי) ואינסוף נקודות אוסף, אך אין אף נקודת מינימום.  
(ג) תהי  $f(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$ . הוכיחו כי  $(x_0, y_0)$  היא נקודת  $max$  של  $f(x, y)$  אם  $x_0$  היא נקודת  $max$  של  $g_1(x)$  ו  $y_0$  היא נקודת  $max$  של  $g_2(y)$ . נסחו והוכיחו טענות מתאימות לגבי נקודת  $min$  ונקודת אוסף.  
(ד) תהי  $f(x, y)$  גזירה. נניח שעבור כל ישר  $l$  העובר דרך  $(0, 0)$ , הנקודה היא מינימום מקומי של הצמצום  $f(x, y)|_l$ . האם זה מבטיח ש  $(0, 0)$  היא נקודת מינימום מקומי של  $f(x, y)$ ?

- (2) מצאו את נקודות  $min/max$  של  $f(x, y)$  בתחום  $D$ :  
(א)  $f(x, y) = xy$ ,  $a > 0, D = \{|x|^a + |y|^a \leq 1\}$   
(ב)  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ ,  $D = \{x \geq 0, y \geq 0, 3y^2 \geq 2x^3, 3x^2 \geq 2y^3\}$   
(ג)  $f(x, y) = 3 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2$ ,  $D = \{x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq -1\}$   
(ד)  $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$ ,  $D = \{|x| + |y| \leq 1\}$   
(ה)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ ,  $D = \{|z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$   
(ו)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $(a > b > c > 0), D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$   
(ז)  $f(x, y) = 3 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2$ ,  $D = \{x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq -1\} \subset \mathbb{R}^2$   
(ח)  $f(x, y) = e^{x^2 + 3y^2}$ ,  $D = \{4x^2 + y^2 \leq 1\}$   
(ט)  $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ ,  $D = \{16x^2 + 9y^2 \leq \pi, x + y \geq 0\}$   
(י)  $f(x, y) = x^3 - 2x + 2xy^2$ ,  $D = \mathbb{R}^2$  או  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$   
(יא)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{xy}{8} + \frac{1}{y}$ ,  $D = \mathbb{R}^2$  או  $D = \{0 < x \leq 4, 0 < y \leq 4, xy \geq 1\}$

- (3) הוכיחו כי למשוואה  $2xy + y^2z + 4e^z = 0$  יש פתרון יחיד וגזיר  $z(x, y)$  המוגדר בסביבה של  $(x_0, y_0) = (1, -2)$  ומקיים  $z(x_0, y_0) = 0$ . מצאו את הערך הקטן/הגדול ביותר של הנגזרת הכיוונית  $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}|_{(1, -2)}$ .

- (4) (א) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין העקומות:  $\{z = ax, y = 0\}, \{y = x^2 + c, z = 0\}$ .  
(ב) מצאו את המרחק (הקטן ביותר) בין נקודה  $P$  לעקום  $C$  במקרים הבאים:  
i.  $C = \{y^2 + x^2 - 2x = -1\} \subset \mathbb{R}^2, P = (0, 1)$ . ii.  $C = \{x^4 + y^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^2, P = (0, 0)$ .  
(ג) מצאו את הנקודות על משטח  $S = \{x^a y^b z^c = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$  הקרובות ביותר לראשית הצירים.  
(ד) מצאו על העקום  $7x^2 + 8xy + y^2 = 45$  את הנקודות הקרובות ביותר לראשית הצירים.