ALGEBRISATION DU MODULE FORMEL D'UNE SINGULARITE ISOLEE

par R. ELKIK

Rappelons d'abord le théorème d'approximation établi la dernière fois pour en donner un corollaire qu'on utilisera dans la suite.

Soient (A,M) un couple hensélien noethérien, $\hat{A}$ le complété M-adique de A , B une A-algèbre de type fini, V l'ouvert de lissité de $\mathrm{Sp}\,B$ sur $\mathrm{Sp}\,A$. Soient $\bar{B} = B \otimes_A A'$ et $\bar{V}$ l'image réciproque de V dans $\mathrm{Sp}\,\bar{B}$. Si $\bar{\varepsilon}$ est une section de $\bar{B}$ dont la restriction au-dessus de $\mathrm{Sp}\,A - V(\mathfrak{J})$ se factorise à travers $\bar{V}$ alors pour tout n , il existe ε , A section de B congru à $\bar{\varepsilon}$ mod M^n .

COROLLAIRE.- *Soit* $\bar{C}$ *une* $\hat{A}$-*algèbre finie, supposée localement intersection complète au-dessus de l'ouvert* $\mathrm{Sp}\,\hat{A} - V(M)$. *Pour tout* n , *on peut trouver une* A-*algèbre finie* C *localement intersection complète au-dessus de* n *congrue à* $\bar{C}$ mod $\mathfrak{J}^n$ *et telle que l'isomorphisme de* $\bar{C}|_{M^n\bar{C}}$ *avec* $C|_{M^nC}$ *se relève en un isomorphisme des* $\hat{A}$-*modules* $\bar{C}$ *et* $C \otimes_A \hat{A}$.

On donne simplement le principe de la démonstration. On peut représenter, par une algèbre de type fini sur A, la fonction qui à un A-schéma associe les faisceaux cohérents d'algèbre admettant une présentation en tant que modules par des modules libres de rang donné, par exemple

$$A^p \longrightarrow A^q \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

et dont la multiplication est décrite par une loi bilinéaire sur A^q ; les conditions, exprimant que N est localement libre d'un certain rang sur chaque composante connexe de $\operatorname{Sp} A - V(M)$ et localement intersection complète, définissent un ouvert de lissité de l'algèbre considérée.

1. <u>Algébrisation du module des singularités isolées</u>.

Soient k un corps, X un schéma affine de type fini sur k présentant une singularité isolée équidimensionnelle. Soit R une algèbre locale essentiellement de type fini sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète excellent, de corps résiduel k, et soit C la catégorie des R-algèbres locales artiniennes de corps résiduel k.

On définit sur C le foncteur

$$F : C \longrightarrow \text{Ens}$$

$$A \longrightarrow \{\text{classes à isomorphisme près de déformations de } X_o \text{ sur } A\}$$

On peut étendre F à la catégorie $\hat{C}$ des R-algèbres locales complètes $\hat{A}$ telles que $\hat{A}|_{M^n} \in C$ pour tout n (M désigne l'idéal maximal de $\hat{A}$), en posant

$$\hat{F}(\hat{A}) = \varprojlim F(\hat{A}|_{M^n}) \quad .$$

Un élément de $\hat{F}(\hat{A})$ est donc représenté par un schéma formel affine plat sur A dont la fibre fermée est munie d'un isomorphisme avec X_o.

On dira d'un élément x de $\hat{F}(\hat{A})$ qu'il est effectif s'il existe un schéma de type fini sur $\hat{A}$, X, tel que x soit défini par la limite projective des $X_n = X \otimes_{\hat{A}} \hat{A}|_{M^n}$.

On dit qu'il existe un représentant algébrique d'un couple $(\hat{A},x)$, s'il existe une R-algèbre essentiellement de type fini A dont le complété est isomorphe à $\hat{A}$ et un schéma de type fini X sur A dont le complété formel définisse x.

Un couple (S,x) $S \in \hat{C}$, $x \in \hat{F}(S)$ est dit formel versel s'il possède les propriétés suivantes :

Soient $A' \xrightarrow{j} A \longrightarrow 0$ une surjection dans C et $y' \in F(A')$ induisant y sur A.

(1) Pour tout morphisme

$$u : S \longrightarrow A \;\Big|\; F(u)(x) = y$$

il existe
$$u' : S \longrightarrow A' \;\Big|\; \begin{cases} F(u')(x) = y' \\ j \circ u' = u \end{cases}.$$

(2) Ce relèvement est unique lorsqu'on prend pour A, k, et pour A' $k[\epsilon]$, algèbre des nombres duaux.

On sait, d'après Schlessinger (Functor of Artin rings), qu'il existe une déformation formelle verselle de X_o. On se propose de montrer qu'on peut en trouver un représentant algébrique. Soit $\overline{X}$ un schéma formel sur $\overline{S} \in \hat{C}$ tel que $(\overline{S},\overline{X})$ soit une déformation formelle verselle de X_o. On va d'abord exhiber une déformation effective de X_o sur $\overline{S}$ suffisamment proche de $\overline{X}$ pour que $(\overline{S},X)$ soit une déformation formelle verselle. Mike Artin a montré (Formal moduli I) que cela suffisait pour pouvoir affirmer qu'il existait un représentant algébrique de la déformation verselle.

2. Approximation de $\overline{X}$.

Considérons

$$\begin{array}{c} \overline{X} \\ \downarrow \\ \mathrm{Sp}\,\overline{S} \end{array}$$

Soit d la dimension de X_o (supposé équidimensionnel) et soit Z_X le lieu singulier de X. $\overline{X}$ est plat sur $\overline{S}$, la fibre fermée X_o présente une singularité isolée. Donc Z_X est fini sur $\overline{S}$.

On peut donc trouver un morphisme fini

$$\bar{X} \longrightarrow \operatorname{Sp}\bar{S}\{Y_1 \dots Y_d\} = \operatorname{Sp}\bar{S}\{Y\} .$$

tel que l'image réciproque du fermé défini par $(Y) = (Y_1 \dots Y_d)$ contienne Z_X.

Au-dessus de l'ouvert $\operatorname{Sp} S\{Y\} - V(Y)$ le schéma fini X est localement intersection complète et en particulier au-dessus de $\operatorname{Sp} S\{Y\} - V(Y) \cup V(M)$. Il résulte donc du corollaire (1) qu'on peut approximer autant que l'on veut le long de $V(Y) \cup V(M)$, (M désigne l'idéal maximal de $\bar{S}$), le schéma $\bar{X}$ en un schéma X fini sur $\tilde{S}[Y_1 \dots Y_d]^{\sim} = \bar{S}[Y]^{\sim}$ et localement intersection complète en dehors de $\operatorname{Sp} S[Y]^{\sim} - V(Y \circ M)$ de telle façon que les faisceaux de modules sur $\bar{S}\{Y_1 \dots Y_d\}$, $O_X \otimes_{S[Y]^{\sim}} S\{Y\}$ et $O_{\bar{X}}$ soient isomorphes. Ici $S[Y]^{\sim}$ désigne le hensélisé de $S[Y_1 \dots Y_d]$ le long de $V(Y)$. Il est aussi hensélien pour la topologie $Y.M$-adique et son complété pour cette topologie est $S\{Y\}$.

Puisque le faisceau de $S\{Y\}$-modules $O_X \otimes S\{Y\}$ est isomorphe à $O_{\bar{X}}$, il est en particulier plat sur $\bar{S}$ donc O_X est plat sur S (il l'est après extension fidèlement plate). On exhibe ainsi un schéma algébrique plat sur $\bar{S}$ et congru à $\bar{X}$, disons, modulo M^n et on suppose qu'on a choisi $n \geqslant 2$. Il résulte de la définition de $(S,\bar{X})$ qu'on peut trouver un morphisme

$$\operatorname{Sp}\bar{S} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Sp}\bar{S}$$

relevant l'identité modulo M^n donc un automorphisme de S tel que pour tout p on ait

$$X_p = X \otimes_{\bar{S}} \bar{S}|_{M^p} \simeq \varphi^*(\bar{X})_p = \varphi^*(\bar{X}) \otimes_{\bar{S}} \bar{S}|_{M^p}$$

et ceci implique que $(\bar{S},X)$ est une déformation formelle verselle de X_o.

3. Existence de déformations henséliennes verselles.

On considère maintenant la catégorie $\tilde{C}$ des R-algèbres locales henséliennes de corps résiduel k - un élément de $\tilde{C}$ est dit algébrique s'il est hensélisé d' une R-algèbre locale essentiellement de type fini. Une déformation de X_o sur $A \in C$ est un A-schéma plat de type fini dont la fibre fermée est munie d'un isomorphisme avec X_o.

Soit F le foncteur défini sur $\tilde{C}$ par

$$A : \longrightarrow \{\text{classes de déformations de } X_o \text{ sur } A\} .$$

Deux déformations appartiennent à la même classe si leurs hensélisés le long de la fibre fermée sont isomorphes.

On dit d'un couple (S,x) , $S \in \tilde{C}$, $x \in F(\tilde{C})$ qu'il est hensélien versel s'il possède les propriétés (1) et (2) de 2 , lorsqu'on suppose maintenant que $A' \longrightarrow A$ est une surjection dans $\tilde{C}$ et que $\hat{A}'$ et A sont algébriques.

THEOREME.- Soit (S,x) un couple représentant la déformation formelle verselle de X_o alors c'est un couple hensélien versel.

PROPOSITION 1.- La condition (1) est remplie lorsqu'on prend pour A le corps résiduel k de A'.

Soit X (resp Y) un schéma de type fini sur S (resp A') appartenant à la classe de x (resp y') et soit $\hat{A}$ le complété de A. On note d'abord qu'il existe un morphisme $u : \operatorname{Sp}\hat{A} \longrightarrow \operatorname{Sp} S$ tel que $u^*(X)$ et $Y \otimes_A \hat{A}$ soient formellement isomorphes. En effet, (S,x) représente la déformation formelle verselle. Par définition de celle-ci, il existe donc, pour tout n , un morphisme

$$u_n : \operatorname{Sp} A|_M{}^n \longrightarrow \operatorname{Sp} S$$

tel que

$$u_n^*(X) \simeq Y_n = Y \otimes_A \hat{A}|_M{}^n$$

et on peut choisir u_{n+1} relevant u_n .

La remarque résulte alors du lemme suivant :

LEMME.- *Soient* $A' \xrightarrow{j} A \longrightarrow 0$ *une surjection dans* C , y' *une déformation plate de* X_o *sur* A' *induisant* y *sur* A *et soit un diagramme*

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d] \\ \operatorname{Sp} S & \operatorname{Sp} A \arrow[l, "u"'] \end{tikzcd}$$

tel que θ *induise un isomorphisme entre* $u^*(X)$ *et* Y . *Alors il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd] & & Y \arrow[ll, "\theta'"'] \arrow[dd] \\ & Y \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\ \operatorname{Sp} S & & \operatorname{Sp} A' \arrow[ll, "u'"'] \\ & \operatorname{Sp} A \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

tel que θ' *induise un isomorphisme entre* $u'^*(X)$ *et* Y' .

En effet u se factorise à travers un sous-schéma fermé artinien de $\operatorname{Sp} S$. Soit $\operatorname{Sp} S|_M{}^n$. Et considérons

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & X_n \arrow[l] \arrow[d] & Y \arrow[l, "\theta_n"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Sp}\, S & \mathrm{Sp}\, S|_{J^n} \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "m"] & \mathrm{Sp}\, A \arrow[l, "u_n"'] \\
& \mathrm{Sp}\, B \arrow[ul, dashed, "v"] & \mathrm{Sp}\, A' \arrow[l, "m'"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où $B = S|_{M^n} \times_{\Lambda} \Lambda'$, m et m' sont les morphismes canoniques. Et soit sur B la déformation $Z = X_n \bigsqcup_{Y} Y'$.

Il existe des isomorphismes canoniques (cf. Schlessinger, Functor of Artin rings) permettant d'identifier $m'^*(Z)$ à Y' , $m^*(Z)$ à X_n . Il existe de plus $v : \mathrm{Sp}\, B \longrightarrow \mathrm{Sp}\, S$ tel que $v \circ m = j$ et $g : Z \longrightarrow X$ induisant un isomorphisme entre Z et $V^*(X)$. D'où un automorphisme de X_n

$$g' = m^*(g) : m^*(Z) = X_n \longrightarrow m^* \circ \varphi^*(X) = X_n \ .$$

Si on considère maintenant $X_n \bigsqcup_{Y} Y'$ défini en prenant pour morphisme de Y dans X_n, $m^*(g) \circ \theta_n$. On définit un B-schéma Z' isomorphe à Z

$$Z' \xrightarrow{\sim h} Z$$

tel que $m^*(h) = g'^{-1} : X_n \longrightarrow X_n$.

Il suffit alors de prendre pour u' , $v \circ m'$ et pour θ' , $g \circ h \circ m'$.

<u>Suite de la démonstration de la proposition</u> 1.

On va maintenant montrer que si $u'^*(X)$ et Y sont formellement isomorphes, alors ils définissent le même élément de $F(\hat{A})$. La proposition résultera alors du théorème d'approximation de Mike Artin (F est un foncteur qui commute aux limites inductives).

LEMME 2.- Soient X et Y deux déformations effectives de X_o sur l'algèbre locale complète $\hat{A}$ d'idéal maximal M, dont les complétés formels (pour la topologie M-adique) sont isomorphes. Alors les hensélisés de ces deux schémas le long de leur fibre fermée sont isomorphes.

Soient $R = A[X_1 \dots X_N]/(f_1 \dots f_m)$ tel que $X = \operatorname{Sp} R$ et $T = A[Y_1 \dots Y_p]/(g_1 \dots g_q)$ tel que $Y = \operatorname{Sp} T$, et $u : \operatorname{Sp}\hat{R} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sp}\hat{T}$.

Soit Δ_x (resp Δ_y) l'idéal de R engendré par les mineurs de rang $N-d$ (resp $P-d$) de la matrice jacobienne $(\partial f_i/\partial X_j)$ (resp$(\partial f_i/\partial Y_j)$).

(On rappelle que d désigne la dimension de X_o).

Δ_x (resp Δ_y) définit le lien singulier Z_x de X (resp Z_y de Y). D'autre part $u^*(\Delta_y) = \Delta_x$. Donc u induit un isomorphisme $Z_X \xrightarrow{\sim} Z_y$ qui est algébrique puisque ces schémas sont finis sur $\hat{A}$. De la même façon, u induit un isomorphisme de tout voisinage infinitésimal de Z_X sur le voisinage de même ordre de Z_y.

D'autre part, u induit un isomorphisme de voisinages infinitésimaux de même ordre des fibres fermées de X et Y, de sorte qu'en définitive on a pour tout n un morphisme

$$u_n : \operatorname{Sp} R \,|\, (M.\Delta_X)^n \longrightarrow \operatorname{Sp} T$$

tel que

$$u_n^*(\Delta_y) = \Delta_x .$$

Désignons par $\tilde{X}$ le complété de X le long de $V(M.\Delta_x)$ et par $\hat{X}$, le complété de X pour cette topologie. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \times_S Y \arrow[d, dash] & \hat{X} \times_S Y \arrow[d, dash] \\ \tilde{X} \arrow[r, dash] & \hat{X} \arrow[u, shift left, "v"'] \end{tikzcd} \qquad (S = \operatorname{Sp} A)$$

On vient d'établir que u permettait de définir une section v de $\hat{X}_{\hat{S}} Y$ au-dessus de $\hat{X}$ se factorisant en dehors de $V(M.\Delta_x)$ à travers l'ouvert de lissité de $X_{\hat{S}} Y$ (car $v^*(\Delta_y) = \Delta_x$) . Il en résulte qu'elle s'approxime et qu'on peut donc trouver un morphisme

$$\tilde{X} \longrightarrow Y$$

Donc

$$u' : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$$

congru à u $\bmod M^n$ pour n arbitraire.

On va montrer qu'un tel morphisme est nécessairement un isomorphisme. La flèche induite sur les complétés le long de $V(M)$ est congrue à u $\bmod M^n$. On a donc une surjection (on note encore u' le morphisme d'anneaux)

$$\hat{u}' : \hat{T} \longrightarrow \hat{R}$$

qui induit un morphisme

$$j_n : M^n \hat{T}\big|_{M^{n+1}\hat{T}} \xrightarrow{\sim} M^n \hat{R}\big|_{M^{n+1}\hat{R}} \quad .$$

Mais $\hat{T}$ et $\hat{R}$ étant plats sur $\hat{A}$, on a des isomorphismes canoniques

$$M^n \hat{T}\big|_{M^{n+1}\hat{T}} \longrightarrow M^n\big|_{M^{n+1}} \otimes T\big|_M$$

$$M^n \hat{R}\big|_{M^{n+1}\hat{R}} \longrightarrow M^n\big|_{M^{n+1}} \otimes R\big|_M \quad .$$

Il est clair alors que j_n est un isomorphisme.

Donc $\hat{X}$ est isomorphe à $\hat{Y}$

$$u' : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$$

fait de $\tilde{X}$ un voisinage étale de la fibre fermée de $\tilde{Y}$ et c'est donc un isomorphisme.

Démonstration du théorème.

Soit $A' \xrightarrow{j} A \longrightarrow 0$ une surjection dans $\tilde{C}$ dont le noyau est l'idéal I de A' et soit $y' \in F(A') \longrightarrow y \in F(A)$. Etant donné $\sigma : S \longrightarrow A$ tel que $\sigma(x) = y$, on cherche $\sigma' : S \longrightarrow A'$ vérifiant $j \circ \sigma' = \sigma$ et $\sigma'(x) = y'$.

a) On démontre d'abord la proposition, lorsqu'on suppose I de longueur finie.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\sigma"] & A \\ S \underset{A}{\cdot} A' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"] & A' \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Si X appartient à la classe de déformation x sur s , Y' à y' et Y à y , il résulte de Functor of Artin rings (Schlessinger) que le complété formel du schéma $X \underset{Y}{\cup} Y'$ est plat sur $\hat{S} \underset{A}{\cdot} A'$ donc son hensélisé est plat sur $S \underset{A}{\cdot} A'$ et il existe un voisinage étale de $X \underset{Y}{\cup} Y'$ définissant un élément de $F(S \underset{A}{\cdot} A')$ induisant x et y' sur S et A' . Soit z cet élément.

D'après la proposition 1, on peut trouver

$$e : S \longrightarrow S \underset{A}{\cdot} A' \quad \text{tel que} \quad e(x) = z \ .$$

On aura $\quad p \circ e(x) = x$.

Donc (Formal moduli I) $p \circ e \in \operatorname{Aut} S$,

de sorte que, quitte à modifier e , on peut supposer $p \circ e = id|_S$.

Il suffit alors de prendre pour $\sigma' : q \circ e$. Et la proposition est démontrée dans ce cas.

b) I est maintenant un idéal quelconque de A'.

Pour tout n, soient $\sigma_n : S \longrightarrow A|_{M^n}$ et $j_n : A'|_{M^n} \longrightarrow A|_{M^n}$ les flèches déduites de σ et j. On désigne de la même façon par y_n, y'_n les déformations induites sur $A|_{M^n}$ et $A'|_{M^n}$ par y et y'.

Il résulte de a) qu'on peut trouver $\sigma'_n : S \longrightarrow A'|_{M^n}$ tel que

$$\sigma'_n(x) = y'_n \quad \text{et} \quad j_n \, \sigma'_n = \sigma_n$$

σ'_n provenant d'une flèche $e_n : S \longrightarrow S_{A|_{M^n}} A'|_{M^n}$.

Considérons

$$\begin{tikzcd}
A|_{M^{n-1}} \arrow[r] & A|_{M^n} \\
B \arrow[u, "p"] \arrow[r, "p'"] & A'|_{M^n} \arrow[u, "j_n"']
\end{tikzcd}$$

où B est défini par $B = A|_{M^{n-1}} \underset{A|_{M^n}}{\cdot} A'|_{M^n}$.

Les deux flèches

$$\sigma_{n-1} : S \longrightarrow A|_{M^{n-1}} \quad \text{et} \quad \sigma'_n : S \longrightarrow A'|_{M^n}$$

se factorisent à travers B

Soit $v : S \longrightarrow B$.

Posons $v(x) = b$. Alors $p(b) = y_{n-1}$, $p'(b) = y'_n$. On a de la même façon une flèche canonique

$$A'|_{M^{n-1}} \longrightarrow B .$$

Considérons alors :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "v"] & B \\
S_B A'|_{M^{n-1}} \arrow[u, "h"] \arrow[r, "p_1"] & A'|_{M^{n-1}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On a déjà vu qu'on pouvait trouver $z \in F(S_B\ A'|_{M^{n-1}})$ induisant x et y'_{n-1} et donc qu'on pouvait trouver

$$e'_{n-1} : S \longrightarrow S_{\dot{B}}\ A'|_{M^{n-1}}$$

tel que

$$e'_{n-1}(x) = z \quad , \quad \text{et} \quad h \circ e'_{n-1} = id|_S \quad .$$

Si on prend pour σ'_{n-1} , $p_1 \circ e'_{n-1}$, on obtient un morphisme de S dans $A'|_{M^{n-1}}$ qui relève σ_{n-1} et σ'_n . On fabrique donc ainsi un système cohérent de morphisme

$$\hat{\sigma}' : S \longrightarrow \hat{A}'$$

tel que $\hat{\sigma}'(x) = \hat{y}'$ ($\hat{y}'$ désigne évidemment l'objet induit sur $\hat{A}'$ par y')

et tel que $\hat{j} \circ \hat{\sigma}' : S \longrightarrow \hat{A}' \longrightarrow \hat{A}'/_{IA'} = \hat{A}$

se factorise en

$$S \xrightarrow{\sigma} A \longrightarrow \hat{A} \quad .$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème d'approximation de Mike Artin pour trouver la flèche cherchée $S \longrightarrow A'$.