UNE APPLICATION D'UN THEOREME D'A'CAMPO A L'EQUISINGULARITE

PAR

LÊ DŨNG TRÁNG

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of April 28, 1973)

RÉSUMÉ

On démontre que si, dans une famille analytique (f_t) de fonctions analytiques définies sur un ouvert U, la fonction f_0 n'a qu'un point critique isolé en 0 et que les fonctions f_t n'ont qu'une seule valeur critique, alors les fonctions f_t n'ont chacune qu'un point critique.

Soit $\pi : X \to D$ un morphisme analytique propre et plat dans un disque ouvert de $\mathbb{C}$ dont les fibres sont des variétés projectives complexes. On suppose que, pour tout $t \in D$, il existe un ouvert U_t de t dans D tel que, pour tout $u \in U_t$, l'inclusion de $\pi^{-1}(u)$ dans $\pi^{-1}(U_t)$ induise un isomorphisme des groupes d'homotopie. Sous ces hypothèses R. THOM a conjecturé que π est topologiquement trivial, i.e. il existe un homéomorphisme $\varphi : X \to D \times \pi^{-1}(0)$ tel que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D \times \pi^{-1}(0) \arrow[dl, "p"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

où p est la projection sur le premier facteur, est commutatif.

En vue de démontrer cette conjecture dans le cas où les fibres sont des hypersurfaces projectives complexes à singularités isolées, B. TEISSIER a conjecturé (cf. [12]) que sous les hypothèses précédentes le lieu singulier de X est un revêtement trivial de D. Ceci revient à montrer:

Soit $(f_t)_{t \in D}$ une famille analytique de fonctions analytiques, définies sur un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, paramétrée par un disque D de $\mathbb{C}$ centré en 0. Supposons que dans la boule $B \subset U$ de $\mathbb{C}^n$ centrée en 0, l'origine soit le seul point critique de f_0. Alors pour $t \neq 0$ assez voisin de 0 il apparait k points critiques $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ de f_t dans B.

THÉORÈME A: *Supposons que pour* $t \neq 0$ *assez petit on ait* $f_t(x_i(t)) = 0$ *pour* $i = 1, \ldots, k$, *alors* $k = 1$.

Dans le cas où $n=1$, le théorème précédent est facile à démontrer. Quand $n=2$, C. HAŞ BEY a donné une démonstration dans [3]. Dans [4] F. LAZZERI indique comment on obtient une démonstration dans le cas général. Nous proposons une démonstration indépendante de celle de F. Lazzeri utilisant un résultat récent de N. A'CAMPO ([1]).

Dans [8] on montre comment le théorème précédent entraîne la conjecture de Thom dans le cas des hypersurfaces à singularités isolées.

Pour l'essentiel des résultats connus sur les singularités des hypersurfaces complexes, nous nous rapportons à [9] ou [7].

Rappelons le résultat de N. A'Campo:

THÉORÈME (N. A'CAMPO) ([1]): *Le nombre de Lefschetz de la monodromie locale en $0 \in \mathbb{C}^n$ d'une hypersurface analytique complexe $F=0$, avec $F(0)=0$ et $dF(0)=0$, est nul.*

En utilisant un résultat bien connu de J. MILNOR (Theorem 6.5 de [9]), on obtient facilement:

COROLLAIRE 1: *Si la fonction analytique F a en $0 \in \mathbb{C}^n$ un point critique isolé alors la trace de la monodromie locale de l'hypersurface $F=F(0)$ en 0 égale $(-1)^n$ en dimension $n-1$.*

Ceci donne évidemment:

COROLLAIRE 2: *La monodromie locale d'une hypersurface complexe de dimension n en un point singulier isolé n'est pas somme directe de $k \geq 2$ monodromies locales d'hypersurfaces complexes de dimension n en des points singuliers isolés.*

Ceci permet de démontrer la conjecture de B. Teissier que nous pouvons énoncer de la façon suivante:

THÉORÈME B: *Soit $(H_t)_{t \in \mathbb{C}}$ une famille analytique complexe d'hypersurfaces analytiques complexes définies dans l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$ n'ayant que des points singuliers isolés. Soit B une boule contenue dans U telle que $H_0 \cap B$ ne contienne qu'un point singuier 0 de H_0. Alors pour t assez petit non nul, $H_t \cap B$ a k_t points singuliers $x_1(t), \ldots, x_{k_t}(t)$. Soient $\mu_1(t), \ldots, \mu_{k_t}(t)$ les nombres de Milnor de ces points singuliers. On suppose que, pour tout t assez petit, on ait:*

$$\sum_{i=1}^{k_t} \mu_i(t) = \mu$$

où μ est le nombre de Milnor de $0 \in H_0$. Alors:

$$k_t = 1 \quad et \quad \mu_1(t) = \mu$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$ assez petit.

En fait le théorème B est la version "géométrique" du théorème A. Cette version a un énoncé analogue pour les intersections complètes à singularités isolées. Dans [4] F. LAZZERI indique une démonstration du théorème B pour les hypersurfaces. On obtient, grâce au théorème B, une amélioration du critère d'équisingularité de LÊ DŨNG TRÁNG et C. P. RAMANUJAM (cf [5], [10] et [8]).

Le théorème B est équivalent au théorème A.

Pour établir cette équivalence remarquons que, si $(H_t)_{t \in D}$ est une famille analytique d'hypersurfaces de U paramétrée par un disque D centré en $0 \in \mathbb{C}$, quitte à supposer D et U suffisamment petits, on a une famille de fonctions analytiques $(f_t)_{t \in D}$ telle que $f_t=0$ soit l'équation de H_t dans U et que la fonction $F: U \times D \to \mathbb{C}$, définie par $F(z, t) = f_t(z)$, soit analytique. D'autre part la donnée d'une telle fonction analytique F équivaut à celle d'une famille analytique de fonctions analytiques (f_t) définies sur U.

Supposons le théorème A vrai. Nous allons démontrer le théorème B. D'après la remarque précédente, quitte à se placer sur un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ centré en 0 assez petit et à choisir U assez petit, on a une fonction analytique $F: U \times D \to \mathbb{C}$. Celle-ci définit une hypersurface $H = F^{-1}(0)$. La restriction de la projection sur D induit un morphisme $\pi: H \to D$ dont les fibres $\pi^{-1}(t)$ pour $t \in D$ sont $H_t \times \{t\}$. Soit C l'espace analytique défini dans $U \times D$ par $\partial F / \partial z_i = 0$ $(i=1, \ldots, n)$. La projection de C sur D est quasi-finie en 0 car $H_0 \times \{0\}$ a une singularité isolée en $(0, 0)$. Le théorème de préparation de Weierstrass montre que, quitte à choisir U et D encore plus petits, la projection de C sur D est un morphisme fini: il en résulte que C est une courbe intersection complète. Remarquons que les points $(x_i(t), t)$ de C au-dessus de $t \in D$ donnent les ponts critiques $x_i(t)$ de f_t. Si U et D sont assez petits, comme C est une intersection complète, un théorème bien connu (0_{IV} (16.5.6) de [2]) montre que la projection $p: C \to D$ est un morphisme plat. Ainsi, si U est un voisinage ouvert assez petit dans lequel 0 est le seul point critique de f_0, le nombre de points critiques de f_t pour $t \in D - \{0\}$ est constant et égal à k, quand D est assez petit, et si $\mu_i(t)$ désigne le nombre de Milnor du point critique $x_i(t)$ de f_t, la platitude de p nous donne:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i(t) = \mu.$$

L'hypothèse du théorème B implique que la courbe C est contenue dans H. Dans ce cas les points critiques de f_t pour $t \in D$ contenus dans U ont la même valeur critique, i.e. $k_t = k$ et:

$$f_t(x_i(t)) = 0 \quad (i=1, \ldots, k)$$

et ceci entraîne, d'après le théorème A, que $k=1$ et $\mu_1(t) = \mu$. Ceci démontre le théorème B.

Supposons alors le théorème B vrai. Démontrons le théorème A. Soit $F: U \times D \to \mathbb{C}$ le morphisme défini sur $U \times D$ par la famille analytique

$(f_t)_{t \in D}$ de fonctions analytiques sur U. On définit l'espace analytique C de $U \times D$ comme ci-dessus. On peut supposer U assez petit pour que 0 soit le seul point critique de f_0 dans U. On a vu ci-dessus que les fibres de $p: C \to D$ nous donnent les points critiques $(x_i(t))$ de f_t. On a vu que pour D assez petit leur nombre ne dépend pas de $t \in D - \{0\}$. L'hypothèse $f_t(x_i(t)) = 0$ entraîne que C est contenu dans l'hypersurface H de $U \times D$ défini par F. Les points $(x_i(t), t)$ sont donc les points singuliers de $H_t \times \{t\} = \pi^{-1}(t)$ et la platitude de $p: C \to D$ nous donne:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i(t) = \mu .$$

D'après le théorème B on a $k=1$ et ceci donne bien le théorème A.

Avant de démontrer le théorème B, remarquons le corollaire suivant, en utilisant les notations ci-dessus.

Corollaire: *Sous les hypothèses du théorème B, pour U et D assez petits, l'ensemble sous-jacent à C coïncide avec le lieu singulier $\Sigma(H)$ de H et la projection de $\Sigma(H)$ sur D est un isomorphisme.*

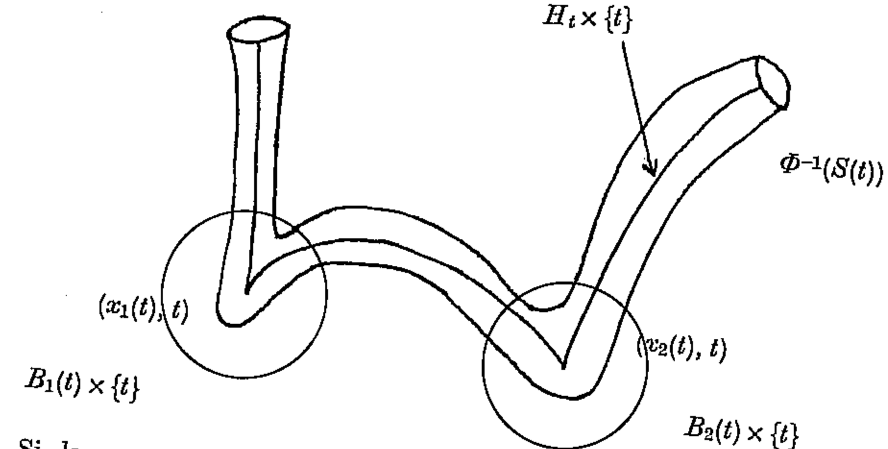
Preuve: La projection $p: C \to D$ induit un morphisme $\tilde{p}: |C| \to D$ de l'espace analytique réduit sous-jacent à C sur D. Comme p est plat, $\tilde{p}$ est également plat et la fibre de $\tilde{p}$ sur 0 est le point réduit $\{0\}$ donc est lisse; ceci entraîne que $|C|$ est non singulière en 0. D'autre part, le lieu singulier de H est contenu dans $|C|$ et a la dimension 1. En effet, si le lieu singulier de H était de dimension 0, comme $\pi: H \to D$ induit par la projection n'a que des valeurs critiques isolées (cf. [9] corollary 2.8), $H_t \times \{t\} = \pi^{-1}(t)$ serait non singulière. Par conséquent le lieu singulier de H et $|C|$ coïncident dans un voisinage de $0 \in U \times D$.

De façon plus générale, soit $F: U \times D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit H l'hypersurface de $U \times D$ définie par $F(z_1, \ldots, z_n, t) = 0$ et $\pi: H \to D$ la projection sur D. Appelons encore C l'espace analytique défini par $\partial F / \partial z_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Alors, quitte à restreindre F sur $U' \times D'$ assez petit, l'ensemble $|C| \cap H$ des points de $C \cap (U' \times D')$ qui sont dans H est le lieu singulier $\Sigma(H)$ de H dans $U' \times D'$. En effet $\Sigma(H)$ est contenue dans $|C|$ et la projection π sur D n'a aucun point critique au-dessus de $D - \{0\}$ dans $H - \Sigma(H)$ (cf. [9] corollary (2.9)), donc la fonction f_t analytique sur U définie par $f_t(z) = F(z, t)$ pour $z \in U$ n'a aucun point critique sur $H_t \times \{t\} - \Sigma(H)$. Donc pour tout t on a: $\pi^{-1}(t) \cap \Sigma(H) = \pi^{-1}(t) \cap |C|$. Comme $\pi^{-1}(0) \cap \Sigma(H) = \pi^{-1}(0) \cap |C| = \{0\}$, on a $\Sigma(H) = |C| \cap H$.

Démontrons alors le théorème B. Soit D un disque de $\mathbb{C}$ centré à l'origine et assez petit. On a un morphisme $\Phi: B \times D \to \mathbb{C}^2$ défini par $\Phi(z, t) = (t, F(z, t))$ où $F(z, t) = f_t(z)$ et où f_t est l'équation de H_t dans U. D'après ce que l'on vient de dire ci-dessus, l'hypothèse sur la constance de la somme de Milnor implique que le lieu critique C de Φ est contenu dans

l'hypersurface H de $B \times D$ définie par $F(z, t) = 0$ et coïncide avec le lieu singulier de cette hypersurface. Donc l'image par Φ du lieu critique coïncide au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ avec $\{0\} \times \mathbb{C}$. Choisissons alors B assez petit pour que H_0 soit transverse au bord de B ainsi qu'à toutes les sphères centrées en 0 contenues dans B. Alors la remarque précédente implique que pour D assez petit et $t \in D$, pour tout cercle $S(t)$ de $\mathbb{C} \times \{t\}$ centré en $(0, t)$ de rayon ε assez petit, les applications $\varphi_t: \Phi^{-1}(S(t)) \to S(t)$ sont des fibrations différentiables localement triviales difféomorphes pour $t \in D$. De plus φ_0 donne la fibration de Milnor de $0 \in H_0$.

Choisissons alors $t \in D$. Soient $B_i(t)$ des boules centrées en $x_i(t)$ contenues dans B de rayon assez petit pour que les sphères centrées en $x_i(t)$ contenues dans $B_i(t)$ coupent transversalement H_t:



Si le rayon ε de $S(t)$ est assez petit, on trouve que φ_t induit $\varphi_t^i: (B_i(t) \times \{t\}) \cap \Phi^{-1}(S(t)) \to S(t)$ par restriction la fibration de Milnor de $x_i(t) \in H_t$.

Soit $x \in S(t)$. Appelons:

$$X = \Phi^{-1}(x),$$
$$X_i = X \cap (B_i(t) \times \{t\}),$$
$$K_i = X \cap \partial(B_i(t) \times \{t\}),$$
$$Z = X - \bigcup \mathring{X}_i .$$

Soit $g_t: X \to X$, $t \in D$, une application caractéristique de la fibration φ_t. On peut supposer que $g_t | Z = Id$.

On a la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficient dans Q (pour $n \geq 3$):

$$0 \to H^{n-2}(Z) \to \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-2}(K_i) \to H^{n-1}(X) \to$$
$$H^{n-1}(Z) \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-1}(X_i) \to \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-1}(K_i) \to 0$$

la cohomologie étant nulle dans les autres dimensions non nulles d'après le résultat de J. Milnor (theorem 6.5 de [9]).

Appliquons la monodromie de φ_t, i.e. l'homomorphisme induit par g_t, à la suite exacte précédente. Celle-ci est l'identité sur $H^*(Z)$ et $H^*(K_i)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{n-2}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-2}(K_i) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & H^{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & {} \\
0 \arrow[r] & H^{n-2}(Z) \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-2}(K_i) \arrow[r] & H^{n-1}(X) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(Z) \arrow[d, "Id"] & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-1}(X_i) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\bigoplus_{i=1}^{k} h_i"] & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-2}(K_i) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
H^{n-2})Z) & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-1}(X_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{k} H^{n-1}(K_i) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme φ_0 et φ_t sont difféomorphes, h est conjuguée à la monodromie locale de $0 \in H_0$.

Si h n'a aucune valeur propre égale à 1, on obtient immédiatement $h = \oplus_{i=1}^{k} h_i$, ce qui implique $k=1$ d'après le corollaire 2 au théorème d'A'Campo énoncé ci-dessus.

On se ramène au cas où h n'a aucune valeur propre égale à 1 en considérant la famille d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par $F(z, t) + X^N = 0$, où X est une nouvelle variable. Le théorème de M. Sébastiani et R. Thom (cf. [11]) donne que la monodromie locale de $F(z, 0) + X^N = 0$ en 0 égale le produit tensoriel de la monodromie locale de $F(z, 0) = 0$ en 0 et celle de $X^N = 0$. Les valeurs propres de la nouvelle monodromie sont alors les produits des valeurs propres de la monodromie locale de $F(z, 0) = 0$ en 0 par les racines $N-$ièmes de l'unité différentes de 1. Donc pour N correctement choisi la monodromie de $F(z, 0) + X^N = 0$ en 0 n'a aucune valeur propre égale à 1. Mais pour cette nouvelle famille d'hypersurfaces on retrouve les hypothèses du théorème B mais les nombres de Milnor sont tous multipliés par $N-1$. On obtient à nouveau $k=1$.

Pour $n=2$ et $n=1$, un raisonnement analogue au précédent est encore possible et ne sera pas détaillé ici (cf. [6]).

BIBLIOGRAPHIE

1. A'Campo, N., Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Series A, 76, 113–118 (1973).
2. Grothendieck, A., Eléments de Géométrie Algébrique (en plusieurs volumes) Pub. de l'I.H.E.S., PUF, Paris.

3. Has Bey, C., Sur l'irréductibilité de la monodromie locale: application à l'équisingularité, C. R. Acad, Sc. Paris, t. 275, p. 105–107 (1972).
4. Lazzeri, F., A theorem on the monodromy of an isolated singularity, in "Singularités à Cargèse", à paraître dans Astérisque.
5. Lê Dũng Tráng, Sur un critère d'équisingularité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 138–140 (1972).
6. ———, L'irréductibilité de la monodromie locale d'après C. Has Bey, séminaire Norguet 1972–1973, Paris VII, à paraître.
7. ———, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, dans "Singularités à Cargèse", à paraître dans Astérisque.
8. ——— and B. Teissier: article à paraître.
9. Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. 61, Princeton (1968).
10. Ramanujam, C. P., Local monodromy, manuscrit non publié.
11. Sébastiani, M. and R. Thom, Sur la monodromie, Inv. Math. 13, p. 90–96 (1971).
12. Teissier, B., Déformation à type topologique constant II, Séminaire Douady-Verdier 71–72, E.N.S., 45, rue d'Ulm.