GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Caractérisations algébriques des singularités de Thom-Boardman de courbes planes*. Note (*) de **Samir Noui-Mehidi**, présentée par Henri Cartan.

On donne une caractérisation des singularités de courbes planes par des symboles de Thom-Boardman et des relations de clôture intégrale d'idéaux.

We give a characterization of plane complex curve singularities in terms of Thom-Boardman symbols and integral closure of ideals.

1.1. EXTENSIONS JACOBIENNES (*cf.* [7], § 4). — Soit A une algèbre analytique donnée par une présentation $A=\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_p\}/I$, et soit $(f_1, \ldots, f_r)$ un système de générateurs de I. Pour tout entier positif k, on note $\Delta^k I$ l'idéal de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_p\}$ engendré par $f_1, \ldots, f_r$ et par tous les mineurs d'ordre $p-k+1$ de la matrice jacobienne de terme général $\partial f_i/\partial x_j$ pour $1 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq j \leqq p$. On convient que

$$\Delta^k I = I \quad \text{si } k \leqq \sup(0, p-r) \qquad \text{et} \qquad \Delta^k I=\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_p\} \quad \text{si } k>p.$$

On montre que $\Delta^k I$ dépend de I seulement et non du choix des générateurs de I (*cf.* [7], §4). On appelle $\Delta^k I$ *l'extension jacobienne à l'ordre* k de l'idéal I. De même l'algèbre quotient $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_p\}/\Delta^k I$ ne dépend que de l'algèbre A et non du choix de la présentation. On la note $\nabla^k A$ et on l'appelle *le quotient jacobien à l'ordre k de* A. Puisque $k<k' \Rightarrow \Delta^k I \subset \Delta^{k'} I$, on a une suite d'épimorphismes d'algèbres

$$A=\nabla^0 A \to \nabla^1 A \to \nabla^2 A \to \ldots$$

Le dernier $\nabla^k A$ non nul est appelé *quotient jacobien critique de A*. En itérant l'opération de construction de ce quotient jacobien critique, on a une suite canonique d'épimorphismes d'algèbres

$$A \to \nabla^{k_1} A \to \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} A \to \ldots \to \nabla^{k_s} \ldots \nabla^{k_3} \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} A \to \ldots,$$

où chaque algèbre est définie comme le quotient jacobien critique de la précédente.

1.2. STABILITÉ D'APPLICATIONS ANALYTIQUES. — On renvoie à [4] pour l'étude de la stabilité des applications et à ([9], §4) pour voir les liens entre la notion de stabilité et celles de déploiement et de déformation de singularités.

1.3. SYMBOLES DE THOM-BOARDMAN. — Soit $G: U \to V$ un morphisme de variétés analytiques U et V de dimensions respectives n et p. Soit, si $k_1 \in \mathbb{N}$:

$$\Sigma^{k_1}(G)=\{x \in U/\dim(\operatorname{Ker} T_x G)=k_1\}.$$

Pour « presque tout » G, lorsque k_1 varie, les $\Sigma^{k_1}(G)$ sont des sous-variétés de U localement fermées (*cf.* [10], chap. II). Boardman montre, dans ([2], §6), qu'on peut définir, lorsque G est « générique »

$$\Sigma^{k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}}(G)=\{x \in \Sigma^{k_1, \ldots, k_r}(G)/\dim(\operatorname{Ker} T_x G\,|_{\Sigma^{k_1, \ldots, k_r}(G)}=k_{r+1}\}.$$

On a $U \supset \Sigma^{k_1}(G) \supset \Sigma^{k_1, k_2}(G) \supset \ldots \supset \Sigma^{k_1, \ldots, k_r}(G) \supset \ldots$, et le résultat :

THÉORÈME DE BOARDMAN (*cf.* [7], §4 ou [5], §4, p. 242). — Soit $G: U \to V$ un morphisme de variétés analytiques de dimensions respectives n et p. Alors :

(1) les $\Sigma^I(G)$ sont des sous-variétés analytiques localement fermées de U, où $I=(k_1, \ldots, k_s)$ désigne une suite d'entiers k_i tels que $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_s \geqq 0$;

(2) $\Sigma^{\mathrm{I}}(\mathrm{G})$ est non vide si et seulement si on a les conditions : (*a*) $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_s \geqq 0$, (*b*) $n-p \leqq k_1 \leqq n$, (*c*) si $k_1 = n-p$ alors $k_2 = \ldots = k_s = n-p$;

(3) $\operatorname{codim}_{\mathrm{U}} \Sigma^{k_1, \ldots, k_s}(\mathrm{G}) = (p-n+k_1)\mu_{k_1, \ldots, k_s} - (k_1-k_2)\mu_{k_2, \ldots, k_s} - \ldots - (k_{s-1}-k_s)\mu_{k_s}$; où $\mu_{k_1, \ldots, k_s}$ désigne le nombre de multiindices décroissants $(j_1, \ldots, j_s)$ tels que $j_\alpha \leqq k_\alpha$ et $j_1 > 0$ $(1 \leqq \alpha \leqq s)$;

(4) si A est l'algèbre analytique en 0 de la fibre d'un germe d'application analytique stable, $\mathrm{G} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, alors pour tout $r \leqq s$, $\nabla^{k_r} \ldots \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} \mathrm{A}$ est l'algèbre analytique de l'intersection $\mathrm{G}^{-1}(0) \cap \Sigma^{k_1 \ldots k_r}(\mathrm{G})$ et la suite $(k_1, \ldots, k_s)$ définie précédemment par les extensions jacobiennes est la même que celle de (1) du théorème de Boardman.

$\mathrm{I} = (k_1, \ldots, k_s)$ *est appelé le symbole de* G *en* 0.

2. Soient $(\mathrm{X}_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée d'équation locale $f(\underline{z}) = 0$, où $\underline{z} = (z_0, \ldots, z_n)$, et $\mathrm{G} : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ un germe de déformation semi-universelle de $(\mathrm{X}_0, 0)$ donné par

$$\mathrm{G}(\underline{z}, \underline{t}) = (\mathrm{F}(\underline{z}, \underline{t}), \underline{t})$$

Où on note

$$\underline{t} = (t_1, \ldots, t_m),\ \mathrm{F}(\underline{z}, \underline{t}) = f(\underline{z}) + \sum_{i=1}^{m} t_i, g_i \qquad \text{et} \qquad \tau(\mathrm{X}_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{z}\}/(f, \partial f) = m+1,$$

∂f désignant l'idéal engendré par $\partial f/\partial z_0, \ldots, \partial f/\partial z_n$ dans $\mathbb{C}\{\underline{z}\}$ et les g_i des éléments de $\mathbb{C}\{\underline{z}\}$ tels que les classes $\bar{1}, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}\{\underline{z}\}/(f, \partial f)$ en forment une base (*cf.* [11], § 4).

Définition 1. — On appelle symbole de f le symbole d'un germe de déformation semi-universelle de $(\mathrm{X}_0, 0)$ qui est un germe d'application stable entre espaces lisses (*cf.* [6], §0).

Définition 2 (*cf.* [3], §1). — Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal propre de A. Un élément x de A est entier sur I s'il existe une relation : $x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$ avec $a_i \in \mathrm{I}^i$ pour $i = 1, \ldots, k$. L'ensemble des éléments de A entiers sur I est un idéal de A appelé clôture intégrale de I dans A et noté $\overline{\mathrm{I}}$.

Dans la proposition suivante, qui généralise un peu celle de Teissier dans [8], chap. III, prop. 5.5, si on a un germe d'application analytique $\Phi : (\mathbb{C}^{\mathrm{N}}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, on notera $j^{(p)}(\Phi)$ l'idéal de $\mathbb{C}\{z_0, \ldots, z_{\mathrm{N}-1}\}$ engendré par $(\partial\Phi/\partial z_0, \ldots, \widehat{\partial\Phi/\partial z_p}, \ldots, \partial\Phi/\partial z_{\mathrm{N}-1})$ et $\mathrm{H}^{(p)}(\Phi)$ le déterminant de la matrice de terme général $\partial^2 \Phi/\partial z_i \partial z_j$ pour $0 \leqq i \leqq \mathrm{N}-1$, $0 \leqq j \leqq \mathrm{N}-1$, $i \neq p$, $j \neq p$.

Proposition. — *Soient* $(\mathrm{X}_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ *un germe de singularité isolé d'hypersurface complexe d'équation locale* $f(z_0, \ldots, z_n) = 0$ *et* G *un germe de déformation semi-universelle de* $(\mathrm{X}_0, 0)$. *On suppose que* $(\mathrm{X}_0, 0)$ *n'est pas du type* A_l (*comparer à* [8], III.5); *alors on a les équivalences :*

(i) *il existe un entier* p *tel que* $\mathrm{H}^{(p)}(f) \notin \overline{j^{(p)}(f)}$;

(ii) *le symbole de* f *est* $(n+1, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1, \ldots)$ *ou* $(n+1, 2, \ldots, 2, 0, 0, \ldots)$;

(iii) $(\mathrm{X}_0, 0)$ *est isomorphe à une singularité d'équation*

$$f(z_0, \ldots, z_n) = z_0^r + a_1(z_1) z_0^{r-1} + \ldots + a_r(z_1) + \sum_{i=2}^{n} z_i^2,$$

où les $a_i(z_1) \in \mathbb{C}\{z_1\}$.

La démonstration de cette proposition utilise les lemmes suivants :

LEMME. DÉFINITION 1 (*cf.* [1], §4, lemma 4.1). — *Si* $f(z_0, \ldots, z_n)=0$ *est une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée* $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, *on peut écrire dans des coordonnées convenables :*

$$f(z_0, \ldots, z_n)=\tilde{f}(z_0, \ldots, z_k)+z_{k+1}^2+\ldots+z_n^2,$$

où $\tilde{f}(z_0, \ldots, z_k) \in (z_0, \ldots, z_k)^3\, \mathbb{C}\{z_0, \ldots, z_k\}$ *définit une singularité isolée d'hypersurface* $(\tilde{X}_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{k+1}, 0)$ *uniquement déterminée par* $(X_0, 0)$ *et appelée* singularité résiduelle *de* $(X_0, 0)$.

LEMME 2 ([8], chap. III, § 5). — *En reprenant les notations du lemme précédent, si le symbole de* f *est* $(n+1, i_2, i_3, \ldots, i_s, \ldots)$ *celui de la singularité résiduelle* $(\tilde{X}_0, 0)$ *de* $(X_0, 0)$ *est* $(i_2, i_2, i_3, \ldots, i_s, \ldots)$ avec $i_2=k+1$.

LEMME 3 (*cf.* [8], chap. 0, §0.5.2). — *Soit* $\Phi: (\mathbb{C}^N, 0) \to (\mathbb{C}^N, 0)$ *un germe d'application analytique de composantes* $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$. *Soit* J *la matrice jacobienne de* Φ *et* Δ *son déterminant. Alors si tous les* $(N-1)$-*mineurs de* J *s'annulent en* 0, Δ *est entier sur l'idéal engendré par* $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ *dans* $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$.

LEMME 4 (d'après [3], §0.16 et §1.8). — *Soient* A *un anneau commutatif unitaire,* B *un idéal propre de* A, I *un idéal propre de* A. *Si un élément* x *de* A *est entier sur* I, *alors l'élément* $\bar{x}$, *image de* x *dans* A/B, *est entier sur l'image de* I *dans* A/B.

LEMME 5 (*cf.* [8], chap. 0, §0.3). — *Soient* A *un anneau commutatif unitaire* normal, I *un idéal principal de* A, *i.e.* $I=g.A$, *avec* g *non diviseur de* 0; *alors* I *est intégralement clos.*

Démonstration de la proposition. — (i)⇒(ii). Sinon le symbole de f serait $(n+1, \alpha_2, \ldots)$ avec $\alpha_2 \geqq 3$, car les cas où $\alpha_2=0$ ou 1 sont exclus par hypothèse, $(X_0, 0)$ n'étant pas quadratique ordinaire ni du type A_l ($l \geqq 2$) (*cf.* [8], chap. III, 5); or $\alpha_2 \geqq 3$ signifie que tous les $(m+n+1-3+1)$-mineurs de la matrice-blocs suivante sont nuls en 0 :

$$\begin{matrix} F_1 & G_1 \\ 0_{m,\,n+1} & I_m \\ F_2 & G_2 \end{matrix}$$

où F_1, G_1, F_2, G_2 sont les matrices de termes généraux respectifs $\partial F/\partial z_i$, g_k, $\partial^2 F/\partial z_i \partial z_j$, $\partial g_k/\partial z_i$ pour $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq m$; I_m étant la matrice unité d'ordre m et $0_{m,\,n+1}$ la matrice nulle $m \times (n+1)$. En particulier tous les $(n-1)$-mineurs de F_2 sont nuls en 0. Donc les n-mineurs de F_2 obtenus après suppression de la p-ième ligne et de la p-ième colonne de F_2 sont nuls en 0. D'où d'après le lemme 3 on a $H^{(p)}(F) \in \overline{j^{(p)}(F)}$, donc, d'après le lemme 4 on a $H^{(p)}(f) \in \overline{j^{(p)}(f)}$.

(ii)⇒(iii) d'après le lemme 2 on a $k+1=2$ et si le symbole de f est

$$(n+1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{j\text{-fois}}, 1, \ldots, 1, \ldots) \quad \text{ou} \quad (n+1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{j'\text{-fois}}, 0, 0, \ldots),$$

celui de $\tilde{f}$ est $(\overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{j+1\text{-fois}}, 1, \ldots, 1, \ldots)$ ou $(\overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{(j'+1)\text{-fois}}, 0, \ldots, 0, \ldots)$, d'où

$$f(z_0, \ldots, z_n) \simeq \tilde{f}(z_0, z_1)+\sum_{i=2}^{n} z_i^2$$

et après un éventuel changement de coordonnées, le théorème de préparation de Weierstrass donne

$$\tilde{f}(z_0, z_1)=z_0^r+a_1(z_1)z_0^{r-1}+\ldots+a_r(z_1) \qquad \text{avec} \quad a_i(z_1)\in\mathbb{C}\{z_1\}, \qquad 1\leqq i\leqq r.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) soient f et $\tilde{f}$ comme ci-dessus. Les idéaux $j^{(1)}(\tilde{f})$ et $\mathrm{H}^{(1)}(\tilde{f})$ de $\mathbb{C}\{z_0, z_1\}$ sont principaux, engendrés respectivement par les polynomes de $\mathbb{C}\{z_1\}[z_0]$ dérivées première et seconde de $\tilde{f}$ par rapport à z_0. Le degré en z_0 du premier étant strictement inférieur à celui du second, on a $\overline{\mathrm{H}^{(1)}\tilde{f}}\notin j^1(\tilde{f})$. Dans l'anneau $\mathbb{C}\{z_0, z_1\}$ normal car régulier on a, d'après le lemme 5, $\overline{j^{(1)}(\tilde{f})}=j^{(1)}(\tilde{f})$, puis d'après le lemme 4 on a

$$\mathrm{H}^{(1)}(f)\notin\overline{j^{(1)}(f)} \quad \text{dans} \ \mathbb{C}\{z_0, \ldots, z_n\}.$$

(*) Remise le 21 avril 1980.

[1] V. I. Arnol'd, *Funct. Anal. and appl.*, 6, n° 4, 1972, p. 258.

[2] J. M. Boardman, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 33, 1967, p. 46.

[3] M. Lejeune et B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité*, Université scientifique et médicale de Grenoble, C.N.R.S., 1974.

[4] J. N. Mather, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 37, 1969, p. 226-230.

[5] J. N. Mather, *On Thom-Boardman Singularities*, in *Dynamical Systems*, Peixoto, éd., Acad. Press, 1974.

[6] F. Pham, *Remarque sur l'équisingularité universelle*, Université de Nice, 1970.

[7] F. Pham, *Classification des singularités*, Exposé à la 12e rencontre entre mathématiciens et physiciens à Strasbourg, 1971.

[8] B. Teissier, *Astérisque*, 7, 8, 1973, p. 349, 348, 291 et 288.

[9] B. Teissier, *The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants*, Summer school in Oslo, 1976, in *Real and Complex Singularities*, Noordhoff publ., 1977.

[10] R. Thom, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 6, 1956, p. 52.

[11] G. N. Tjurina, *Math. U.S.S.R. Izv.*, 3, 1970, p. 967-998.

55, B, avenue Aouati-Mostefa, Constantine, Algérie.