GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Queues d'arondes d'une déformation semi-universelle.* Note (*) de **Samir Noui-Mehidi**, présentée par Henri Cartan.

On donne des formules permettant le calcul du nombre de queues d'arondes d'une section 3-plane générique du discriminant de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'hypersurface complexe. Pour cela on étudie dans une telle section le nombre de tangentes verticales qu'on définira.

We give formulas which compute the number of swallow tails of a generic affine 3-dimensional section of the discriminant of the semi-universal deformation of an isolated singular complex hypersurface. For this purpose we define and compute the number of vertical tangents in such a 3-dimensional section.

I. Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée défini localement par $f(z_0, \ldots, z_n) = 0$, et soit $G : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ un germe de déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$ donné par

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = (F(\mathbf{z}, \mathbf{t}), \mathbf{t}) \qquad \text{avec} \quad (\mathbf{z}, \mathbf{t}) = (z_0, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_m),$$

$$F(\mathbf{z}, \mathbf{t}) = f(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^{m} t_i g_i,$$

où $\tau(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}/(f, \partial f)) = m+1$, ∂f désignant l'idéal $(\partial f/\partial z_0, \ldots, \partial f/\partial z_n)$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$ et où les g_i sont des éléments de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ tels que les classes $\bar{1}, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}/(f, \partial f)$ en forment une base (*cf.* [10]).

On utilise la notion d'idéaux de Fitting d'un faisceau de modules pour avoir des définitions d'espace critique et de discriminant d'un morphisme d'espaces analytiques et de sous-espace singulier d'un espace analytique, qui soient compatibles au changement de base (*cf.* [9], § 1 et 2).

On notera par la suite, pour un morphisme h d'espaces analytiques, le discriminant de h par $\Delta(h)$, l'espace critique de h par $C(h)$ et par $S(X)$ le sous-espace singulier d'un espace analytique X. On rappelle que (*cf.* [8], chap. III) $C(G) = \Sigma^{n+1}(G)$, strate de Boardman (*cf.* [6], § 4, p. 240) d'un représentant assez petit du germe G, ce représentant étant un morphisme stable et plat entre espaces lisses (*cf.* par exemple [1]).

On note $S = \overline{\Sigma^{n+1, 1}}(G)$ l'adhérence dans $C(G)$ de la strate $\Sigma^{n+1, 1}(G)$ qui est définie dans $C(G)$ par le hessien de F par rapport à $\mathbf{z}$ noté $H_{\mathbf{z}}(F)$. On étudie les multiplicités à l'origine des discriminants respectifs des germes de morphismes suivants :

1° Φ défini par le composé de la restriction de G à $C(G)$ avec une projection générale de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{C}^m$;

2° Φ_1 défini par le composé de Φ avec une projection générale de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{C}^{m-1}$;

3° Ψ défini par le composé de la restriction de Φ à S avec une projection générale de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{C}^{m-1}$.

On montre (*cf.* [7], chap. II et III) que Φ et Ψ sont *plats* et *finis* et que Φ_1 est *plat*.

On choisit une métrique sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$, et si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ et $E^\perp$ l'orthogonal de E on notera pour $\varepsilon \in E^\perp$, E_ε le sous-espace affine parallèle à E, i. e. $E_\varepsilon = \varepsilon + E$.

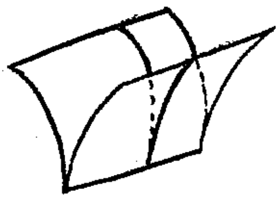
On rappelle le résultat suivant (*cf.* [11], §3.4.3) :

PROPOSITION 1. — *Il existe un ouvert de Zariski dense* Ω, *dans la grasmannienne* $G_{3,m+1}$ *des* 3-*plans de* $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ *passant par l'origine, tel que pour* $P\in\Omega$, *il existe des voisinages* $U_P\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ *de* 0, $V_P\subset P^\perp$ *de* $0\in P^\perp$ *et un ouvert analytique dense* $W_P\subset V_P$ *tels que, pour tout* $\varepsilon\in W_P$: $U_P\cap P_\varepsilon\cap\Delta(G)=\Sigma_\varepsilon$ *est une surface ayant au plus comme singularités les* 3 *types suivants de singularités:*

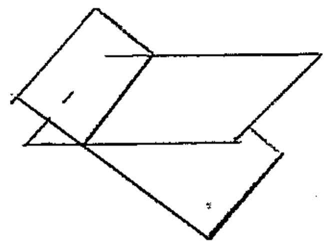
1° *des* cusps *et des* points doubles *en codimension* 1 *de* $\Delta(G)$;

2° *des* points triples, *des* cusps *avec plan* transverse *et des* queues d'aronde *en codimension* 2 *de* $\Delta(G)$.

1°

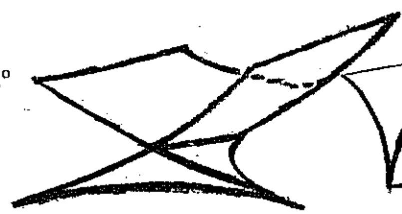


(*a*) cusps

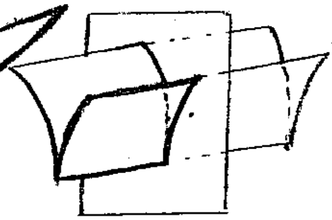


(*b*) point double.

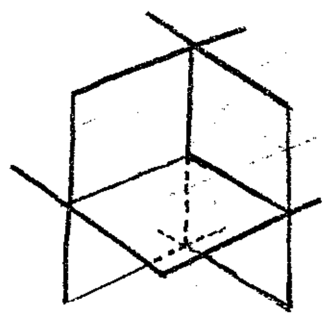
2°



(*a*) queue d'aronde



(*b*) cups avec plan transverse



(*c*) point triple.

Les nombres respectifs de ces singularités sont indépendants des choix de P et de ε. On note ν le nombre des queues d'aronde de Σ_ε.

II. TANGENTES VERTICALES. — Dans ce paragraphe nous donnons la définition du nombre de tangentes verticales du discriminant $\Delta(G)$ (*cf.* [4], §3 et 4). Soient $P\in\Omega$, P_ε, Σ_ε comme dans la proposition 1, et Q un 2-plan générique passant par 0 tel que $Q\subset P$. Soit $\tilde{\pi}$: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m\to Q^\perp$ la projection sur l'orthogonal de Q. On note $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ l'image inverse de Σ_ε par la restriction de G à C(G), $G|_{C(G)}$, qui est finie.

Soient L_ε la droite $\tilde{\pi}(P_\varepsilon)$ et $\Phi_{1,\varepsilon}$, G_ε, $\tilde{\pi}_\varepsilon$ les restrictions respectives de Φ_1 et G à $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ et de $\tilde{\pi}$ à Σ_ε.

DÉFINITION. — Un point *s* de Σ_ε est critique pour $\tilde{\pi}_\varepsilon$ si c'est un point singulier de Σ_ε ou si Σ_ε admet en ce point un plan tangent vertical c'est-à-dire parallèle à Q.

On montre (*cf.* [7], chap. III) que Φ_1 est toujours de rang maximal au-dessus des points réguliers de $\Delta(G)$; donc on peut se limiter à considérer $\Gamma_\varepsilon=S(\Delta(G))\cap\Sigma_\varepsilon$, le sous-espace singulier de Σ_ε. Soit $\pi_\varepsilon : \Gamma_\varepsilon \to L_\varepsilon$ la restriction de π_ε à Γ_ε qui est un revêtement analytique.

Pour $s \in \Gamma_\varepsilon$ on pose comme dans ([4], § 3) :

$$d_s = \text{degré local de } \pi_\varepsilon = \operatorname{mult}(\pi_\varepsilon^{-1}\pi_\varepsilon(s), s),$$
$$d'_s = \operatorname{mult}(\Gamma_\varepsilon, s);$$

quand s n'est pas à tangente verticale on a $d_s = d'_s$; on appelle alors :

$$\tau = \sum_{s \in \Gamma_\varepsilon} (d_s - d'_s)$$

le *nombre* de *tangentes verticales* de Σ_ε.

PROPOSITION. —

$$\operatorname{mult}(\Delta(\Phi_1), 0) = \tau.$$

Dans la démonstration on utilise d'abord le théorème de Teissier de décomposition d'une déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'intersection complète (*cf.* [8], th. 2.1, chap. III) pour prouver que

$$L_\varepsilon \cap \Delta(\Phi_1) = \Delta(\Phi_{1,\varepsilon}) = \pi_\varepsilon(\{\text{points de } \Sigma_\varepsilon \text{ à tangente verticale}\}).$$

Puis grâce à la formule de G. M. Greuel et Lê Dũng Tráng (*cf.* [2], lemma 5.3, ou [5], prop. 3.6.4) :

$$\operatorname{mult}(\Delta(\Phi_{1,\varepsilon}), t) = \sum_{x \in \Phi_{1,\varepsilon}^{-1}(t)} [\mu_x(\Phi_{1,\varepsilon}^{-1}(t)) + \mu_x(\tilde{\Sigma}_\varepsilon)].$$

On peut choisir $\varepsilon \in W_P$ de sorte que $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ soit une surface lisse en prenant $\varepsilon \notin \Delta(G')$, où G' est le morphisme composé de $G|_{C(G)}$ avec la projection de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ sur $P^\perp$.

Puis on a, si $G_{\varepsilon, t}$ désigne la restriction de G à $\Phi_{1,\varepsilon}^{-1}(t)$:

$$\operatorname{mult}(\Delta(G_{\varepsilon,t}), s) = \sum_{x \in G^{-1}(s)} [\mu_x(\Phi_{1,\varepsilon}^{-1}(t)) + \mu_x(G^{-1}(s))] = \operatorname{mult}(\pi_\varepsilon^{-1}(t), s) = d_s.$$

On remarque enfin (*cf.* [7], chap. III) :

$$\sum_{x \in G^{-1}(s)} \mu_x(G^{-1}(s)) = d'_s,$$

d'où

$$\sum_{x \in G^{-1}(s)} \mu_x(\Phi_{1,\varepsilon}^{-1}(t)) = d_s - d'_s$$

donc

$$\operatorname{mult}(\Delta(\Phi_1), 0) = \sum_{t \in L_\varepsilon \cap \Delta(\Phi_1)} \operatorname{mult}(L_\varepsilon \cap \Delta(\Phi_1), t) = \sum_{t \in L_\varepsilon \cap \Delta(\Phi_1)} \Big[\sum_{s \in \pi_\varepsilon^{-1}(t)} (d_s - d'_s)\Big] = \tau.$$

COROLLAIRE. — *On a* $\tau = \mu_1 + \mu_3$, *où* μ_1 *est le nombre de Milnor de la courbe polaire* $\Phi^{-1}(L_1)$ *et* μ_3 *celui de la surface intersection complète* $\Phi_1^{-1}(L_2)$, *si* L_1 *et* L_2 *sont des droites générales respectives de* $\mathbb{C}^m$ *et* $\mathbb{C}^{m-1}$ *passant par* 0.

Par une méthode analogue à la précédente on montre que Ψ ne ramifie qu'au-dessus des queues d'aronde et des tangentes verticales de $\Delta(G)$. D'où

$$\operatorname{mult}(\Delta(\Psi), 0) = \nu + \tau.$$

Puis on établit la formule

$$\operatorname{mult}(\Delta(\psi), 0) = \varkappa + \mu_2 - 1,$$

où $\varkappa$ est le nombre de cusps d'une section 2-plane générique de $\Delta(G)$ (*cf.* [8], cor. III.5.2) et μ_2 le nombre de Milnor de la courbe dans S, $\Psi^{-1}(L)$, intersection complète à singularité isolée éventuelle en 0, L étant une droite générale de $\mathbb{C}^{m-1}$ passant par 0.

Ce dernier résultat se montre en utilisant la formule de Greuel-Lê Dũng Tráng et le fait que : $\operatorname{mult}(\Psi^{-1}(0), 0) = \varkappa$, formule basée sur les deux propositions suivantes :

Proposition (*cf.* [3], § 2 ou [7], chap. II). — S *est l'espace critique de* Φ *et* $\operatorname{mult}(\Delta(\Phi), 0) = \varkappa$.

Proposition (*cf.* [4], § 2.1). — *Soient* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ *et* $f' : (\mathbb{C}^{n'}, 0) \to (\mathbb{C}^{p'}, 0)$ *des germes d'applications analytiques. On suppose que les fibres* $(f^{-1}(0), 0)$ *et* $(f'^{-1}(0), 0)$ *sont des intersections complètes à singularité isolée isomorphes. Alors on a*

$$\operatorname{mult}(\Delta(f), 0) = \operatorname{mult}(\Delta(f'), 0).$$

(*) Remise le 16 juillet 1979.

[1] P. Berthelot, *Séminaire de l'E.N.S. de géométrie analytique*, exposé 19, 1971-1972, publié dans *Astérisque*, 16, 1974.

[2] H. M. Greuel, *Math. Ann.*, 214, 1975, p. 235-266.

[3] H. M. Greuel, *Manuscripta Math.*, 21, 1977, p. 227-241.

[4] H. M. Greuel et Lê Dũng Tráng, *Math. Ann.*, 222, 1976, p. 71-88.

[5] Lê Dũng Tráng, *Funksional'nyi Anal. i Ego, Priloshezinya*, 8, 1974, p.

[6] J. N. Mather, *On Thom-Boardman Singularities* in *Dynamical Systems*, pub. by Peixoto, éd., 1974, Acad. Press.

[7] S. Noui-Mehidi, *Thèse de 3e cycle*, Paris-VII, 1978.

[8] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney* in *Astérisque*, 7 et 8, 1973, p. 441-463.

[9] B. Teissier, *The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants* (*Summer school in Oslo*, 1976, *in Real and Complex Singularities*, Noordhoff pub., 1977.

[10] G. N. Tjurina, *Math. U.S.S.R.*, Izvestija, 3, 1970, p. 967-998.

[11] H. D. Vohmann, *Einige Eigenschaften der kritischen Menge und der Diskriminante verseller Deformation vollständiger Durchschnitte mit isolierter singularität* [*Dissertation*, Bonn, 1974 (*Bonner Math. Schriften*, 70)].

55 B, avenue Aouati Mostefa, Constantine, Algérie.