Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 267 à 271.

IDEAUX DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES

par Jean-Claude TOUGERON

Soit $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{O}_p$) l'anneau des germes à l'origine des fonctions numériques, définies et indéfiniment dérivables (resp. analytiques) au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^p$). Notons $C^\infty(n, p)$ l'ensemble des germes à l'origine de $\mathbf{R}^n$ des applications Φ, indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, et telles que $\Phi(0) = 0$.

Il est bien connu que l'anneau $\mathcal{E}_n$ n'est pas noethérien ; en outre, tout germe de fermé à l'origine de $\mathbf{R}^n$ est le germe des zéros $V(\mathfrak{J})$ d'un idéal de type fini $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{E}_n$. Il est donc sans intérêt d'étudier tous les idéaux de $\mathcal{E}_n$. Aussi, avons nous considéré une famille très particulière d'idéaux :

Soit I un idéal de $\mathcal{O}_p$ engendré par des germes $f_1, \ldots, f_q$; nous étudions l'idéal de $\mathcal{E}_n$, noté $\Phi^* I$, engendré par les $f_i \circ \Phi$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Bien entendu, si Φ est quelconque, on ne peut rien dire ; mais nous montrons que, sous des hypothèses de transversalité sur Φ, vérifiées "en général" (nous préciserons ultérieurement cette expression), l'image réciproque $\Phi^* I$ possède des propriétés analogues à celles de I.

Ce travail s'inspire d'une part, de la théorie des singularités des applications différentiables, développée d'abord par H. Whitney et R. Thom (R. Thom étudie les germes d'ensembles $\Phi^{-1}(V(I))$, où $V(I)$ désigne le germe des zéros de I, d'un point de vue topologique, en particulier leur stabilité topologique) ; d'autre part, de résultats de L. Hörmander, S. Łojasiewicz et B. Malgrange, concernant les idéaux de l'anneau $\mathcal{E}_n$, engendrés par des fonctions analytiques (c'est le cas particulier : $n = p$; Φ = identité, de notre problème).

1. Propriétés généralement vraies (J. Cl. Tougeron, [6]).

Soit $\mathcal{F}(n, p)$ l'ensemble des séries de Taylor à l'origine de $\mathbf{R}^n$ de tous les $\Phi \in C^\infty(n, p)$; de même, si $q \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathcal{F}^q(n, p)$ l'ensemble des polynômes de Taylor d'ordre q à l'origine de $\mathbf{R}^n$, de tous les $\Phi \in C^\infty(n, p)$. On a des projections évidentes : $T : C^\infty(n, p) \to \mathcal{F}(n, p)$;

$$\pi_q : \mathcal{F}(n, p) \to \mathcal{F}^q(n, p) \quad ; \quad \pi_{q,q'} : \mathcal{F}^{q'}(n, p) \to \mathcal{F}^q(n, p), \text{ si } q' \geqslant q.$$

Pour tout $q \in \mathbf{N}^*$, soit V_q une sous-variété algébrique réelle de $\mathcal{F}^q(n, p)$ et supposons que : $\ldots \supset \pi_q^{-1}(V_q) \supset \pi_{q+1}^{-1}(V_{q+1}) \supset \ldots$

Nous dirons que $V = \bigcap_{q \in \mathbf{N}^*} \pi_q^{-1}(V_q)$ est une sous-variété algébrique de $\mathcal{F}(n, p)$ et par définition, sa codimension sera égale à $\lim_{q \to \infty} \operatorname{codim}_{\mathcal{F}^q(n,p)} V_q$. La variété V

est de codimension infinie, si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $\forall q \in \mathbf{N}^*$ et $\forall f_q \in V_q$, il existe un entier $q' \geqslant q$ et $f_{q'} \in \pi_{q,q'}^{-1}(f_q)$, tels que $V \cap \pi_{q'}^{-1}(f_{q'}) = \emptyset$.

DEFINITION. – Une propriété (P) relative aux éléments de $C^\infty(n, p)$ est vraie *en général* si pour tout $\xi \in \mathscr{F}^1(n, p)$ il existe une sous-variété algébrique de codimension infinie V_ξ de $\mathscr{F}(n, p)$ telle que tout Φ appartenant à $T^{-1}(\pi_1^{-1}(\xi) - V_\xi)$ satisfasse à (P).

On ne doit pas confondre cette notion avec celle de "propriété générique" au sens où l'entend Thom. Par exemple, dans le cas $p = 1$, on sait que génériquement Φ est une "fonction de Morse", i.e. l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ par les dérivées partielles $\partial\Phi/\partial x_1, \ldots, \partial\Phi/\partial x_n$ contient l'idéal maximal m_n de $\mathscr{E}_n$. Mais cette propriété n'est pas *générale* : on peut simplement affirmer qu'*en général* l'idéal engendré par les $\partial\Phi/\partial x_i$ contient une puissance de m_n.

Soit I un idéal propre de $\mathscr{O}_p$: dans les paragraphes suivants, nous énonçons quelques propriétés vérifiées *en général* par $\Phi^* I$, lorsque Φ décrit $C^\infty(n, p)$.

2. Le théorème de quasi-transversalité (J. Cl. Tougeron, [6])

Si $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathscr{E}_n$, on note $\hat{\mathscr{I}}$ l'idéal de l'anneau des séries formelles $\mathscr{F}_n = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, formé par les séries de Taylor, à l'origine de $\mathbf{R}^n$, des éléments de $\mathscr{I}$. On a d'abord le résultat suivant (conservation de la hauteur) :

THEOREME 1. – *En général : $ht\, \widehat{\Phi^* I} = \inf(n, ht I)$.*

En particulier, si $ht\, I \geqslant n$, *en général* $\Phi^* I$ est un idéal de définition de $\mathscr{E}_n$, i.e. $\Phi^* I$ contient une puissance de m_n. Par exemple, si $n \leqslant p$, l'idéal (Φ) engendré dans $\mathscr{E}_n$ par les composantes $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ de Φ est, *en général* un idéal de définition de $\mathscr{E}_n$.

Venons en au théorème de quasi-transversalité. Si $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathscr{E}_n$ et si $k \in \mathbf{N}^*$, notons $J_k(\mathscr{I})$ l'idéal engendré dans $\mathscr{E}_n$ par $\mathscr{I}$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ appartiennent à $\mathscr{I}$ et $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$. Cet idéal ne dépend pas du système de coordonnées locales choisi et $J_k(\mathscr{I}) = \mathscr{I}$ si $k > n$. Désignons par $\sigma_k(\mathscr{I})$ l'idéal de $\mathscr{E}_n$ engendré par les ξ tels que $\xi \,.\, \mathscr{I}$ soit contenu dans un sous-idéal de $\mathscr{I}$ engendré par k éléments, et posons :

$$R_k(\mathscr{I}) = \sqrt{J_k(\mathscr{I})} \cap \sqrt{\sigma_k(\mathscr{I})}.$$

Si I est un idéal de $\mathscr{O}_p$ (ou de l'anneau $\mathscr{O}(U)$ des fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$), on définit pareillement des idéaux $J_k(I)$, $\sigma_k(I)$, $R_k(I)$.

L'interprétation de l'idéal $R_k(I)$ est facile. Par exemple, si I est un idéal de $\mathscr{O}(U)$, l'ensemble $V(I) - V(R_k(I))$ est exactement l'ensemble des points x de $V(I)$ tels que $\mathscr{O}_x \mid I_x$ soit un anneau local régulier de dimension $p - k$. En particulier, $V(I) - V(R_k(I))$ est une sous-variété analytique de codimension k de l'ouvert U.

DEFINITION. – Une k-strate de $\mathscr{E}_n$ est un couple $(\mathscr{I}, \mathscr{I}')$ de deux idéaux de type fini de $\mathscr{E}_n$ tels que $\mathscr{I} \subset \sqrt{\mathscr{I}'} \subset R_k(\mathscr{I})$. Visiblement, si $(\mathscr{I}, \mathscr{I}')$ est une k-strate, le germe d'ensemble $V(\mathfrak{J}) - V(\mathfrak{J}')$ est un germe de variété C^∞, de codimension k, à l'origine de $\mathbf{R}^n$.

On définirait de même une k-strate de $\mathcal{O}_p$. Ceci dit, on a le résultat suivant :

THEOREME 2. – *Soit (I, I') une k-strate de $\mathcal{O}_p$:*

(1) *si $I' \neq \mathcal{O}_p$, en général $(\Phi^* I, \Phi^* I')$ est une k-strate de $\mathcal{E}_n$*

(2) *si $I' = \mathcal{O}_p$, en général $(\Phi^* I, m_n)$ est une k-strate de $\mathcal{E}_n$*

Le théorème précédent est une version algébrique et locale du théorème de transversalité de Thom [5] : si (I, I') est une k-strate de $\mathcal{O}_p$, on en déduit qu'*en général* Φ est transverse sur le germe de variété analytique $V(I) - V(I')$, sauf peut-être à l'origine de $\mathbf{R}^n$ (mais en fait le théorème 2 est beaucoup plus précis que cette conséquence).

3. Idéaux fermés (J. Cl. Tougeron et J. Merrien, [7]).

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{E}(\Omega)$ la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions numériques définies et de classe C^∞ sur Ω. Munissons $\mathcal{E}(\Omega)$ de sa structure habituelle d'espace de Fréchet (convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact). Si $a \in \Omega$, l'application $T_a : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ qui à toute fonction f associe sa série de Taylor en a est surjective (théorème de Borel généralisé). Si $\mathfrak{J}(\Omega)$ est un idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$, on pose $\widehat{\mathfrak{J}(\Omega)} = \{f \in \mathcal{E}(\Omega) \mid \forall a \in \Omega, T_a f \in T_a \mathfrak{J}(\Omega)\}$: un théorème de Whitney affirme que l'adhérence de $\mathfrak{J}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ est égale à $\widehat{\mathfrak{J}(\Omega)}$. La notion d'idéal fermé se localise : un idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{E}_n$ sera dit "fermé" s'il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{R}^n$ est un idéal fermé $\mathfrak{J}(\Omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ tels que $\mathfrak{J}(\Omega)$ engendre $\mathfrak{J}$ sur $\mathcal{E}_n$.

On a le résultat suivant, dû à B. Malgrange [3], et démontré d'abord dans le cas d'un polynôme par L. Hörmander [1], et dans le cas d'une fonction analytique par S. Łojasiewicz [2] :

Un idéal de $\mathcal{E}_n$ engendré par un nombre fini de germes de fonctions analytiques est fermé.

Le théorème suivant généralise le théorème précédent (la démonstration utilise les théorèmes 1 et 2 et aussi les techniques développées pas S. Łojasiewicz et B. Malgrange) :

THEOREME 3. – *Soit I un idéal de $\mathcal{O}_p$. Si $\Phi \in C^\infty(n, p)$, en général l'idéal $\Phi^* I$ est fermé.*

Enfin, il résulte facilement du théorème de B. Malgrange que l'anneau $\mathcal{E}_n$ *est plat sur l'anneau* $\mathcal{O}_n$ des germes des fonctions numériques, analytiques à l'origine de $\mathbf{R}^n$. L'analogue de ce résultat dans le présent contexte est le suivant :

THEOREME 4. – *Soit I un idéal de $\mathcal{O}_p$. Si $\Phi \in C^\infty(n, p)$, en général $TOR_1^\Phi(\mathcal{O}_p/I, \mathcal{E}_n)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie (et même, en général*

$$TOR_1^\Phi(\mathcal{O}_p/I, \mathcal{E}_n) = 0,$$

si la dimension homologique $dh(\mathcal{O}_p/I)$ de $\mathcal{O}_p/I$ sur $\mathcal{O}_p$ est $\leqslant n$).

[Un germe d'application $\Phi \in C^\infty(n, p)$ munit $\mathcal{E}_n$ d'une structure de $\mathcal{O}_p$-module : le module $TOR_1^{\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_p/I, \mathcal{E}_n)$ est alors noté $TOR_1^\Phi(\mathcal{O}_p/I, \mathcal{E}_n)$; la condition $TOR_1^\Phi(\mathcal{O}_p/I, \mathcal{E}_n) = 0$ signifie simplement ceci : si I est engendré sur $\mathcal{O}_p$ par $f_1, \ldots, f_q$, le module des relations entre les $f_i \circ \Phi$ à coefficients dans $\mathcal{E}_n$ est engendré sur $\mathcal{E}_n$ par les relations entre les f_i à coefficients dans $\mathcal{O}_p$].

On déduit des théorèmes précédents de nombreux renseignements sur l'idéal $\Phi^* I$: par exemple, si $\mathcal{O}_p/I$ est réduit (i.e. sans nilpotents) et si $dh(\mathcal{O}_p/I) < n$, *en général* $\mathcal{E}_n/\Phi^* I$ est réduit ; si $\mathcal{O}_p/I$ est normal et si $dh(\mathcal{O}_p/I) < n - 1$, *en général* $\mathcal{F}_n/\widehat{\Phi^* I}$ est normal.

4. Stabilité locale des idéaux (J. Cl. Tougeron, [6]).

Désignons par Dif(n) le groupe des germes $\mathcal{C}$ (à l'origine de $\mathbf{R}^n$) des difféomorphismes C^∞ d'un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$, tels que $\mathcal{C}(0) = 0$.

DEFINITION. – Un germe d'application $\Phi \in C^\infty(n, p)$ est *I-déterminant* s'il existe un entier q tel que la condition suivante soit satisfaite :

Pour tout $\Phi' \in C^\infty(n, p)$ tel que $\Phi - \Phi'$ soit q-plat à l'origine

(i.e. $$\pi_q \circ T(\Phi) = \pi_q \circ T(\Phi')),$$

il existe un élément de Dif(n) qui transforme l'idéal $\Phi^* I$ en l'idéal $\Phi'^* I$.

En particulier, sous cette dernière hypothèse, et si Φ_q désigne le polynôme de Taylor de degré q de Φ à l'origine, il existe un élément de Dif(n) qui transforme l'idéal $\Phi^* I$ en l'idéal $\Phi_q^* I$: donc, à difféomorphisme C^∞ près, l'idéal $\Phi^* I$ est engendré par des germes de fonctions analytiques.

Nous dirons que l'idéal I est *rigide*, si *en général* un élément de $C^\infty(n, p)$ est I-déterminant. On a le résultat suivant :

THEOREME 5. – *Soit I un idéal de hauteur k de $\mathcal{O}_p$, tel que*

$$I = \sqrt{I} \qquad \textit{et} \qquad ht(R_k(I)) \geqslant \inf(n, p - 1).$$

L'idéal I est rigide.

Soit I un idéal de $\mathcal{O}_p$ tel que $I = \sqrt{I}$ et $ht(I) \geqslant \inf(n - 1, p - 2)$: l'hypothèse du théorème précédent est alors satisfaite (l'hypothèse $I = \sqrt{I}$ entraine en effet : $ht(R_k(I)) > k = ht(I)$) et donc I est rigide. En particulier, si $n \leqslant 2$ ou si $p \leqslant 3$, tout idéal premier de $\mathcal{O}_p$ est rigide (par contre si $n \geqslant 3$ et si $p \geqslant 4$, il existe dans $\mathcal{O}_p$ des idéaux non rigides).

Signalons enfin la conséquence suivante. Soit $y_1, \ldots, y_p$ un système de coordonnées locales à l'origine de $\mathbf{R}^p$. L'idéal I engendré par $y_1, \ldots, y_p$ dans $\mathcal{O}_p$ est évidemment rigide et $\Phi^* I$ est égal à l'idéal (Φ) engendré dans $\mathcal{E}_n$ par les composantes de Φ. Ainsi, *en général* il existe un entier $q > 0$ et un élément de Dif(n) qui transforme l'idéal (Φ) en l'idéal (Φ_q) engendré dans $\mathcal{E}_n$ par les polynômes de Taylor d'ordre q des composantes de Φ (en fait, on a des résultats beaucoup plus précis : nous renvoyons le lecteur à [6], ch. II).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hörmander L. — On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Mathematik*, 3, 1958, p. 555-568.

[2] Łojasiewicz S. — Sur le problème de la division, *Studia Math*, 18, 1959, p. 87-136.

[3] Malgrange B. — *Ideals of differentiable functions*. Oxford Uni-Press, 1966.

[4] Serre J.P. — Algèbre locale, Multiplicités, lecture notes, in *Mathematics*, 11, 1965.

[5] Thom R. — Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1956, p. 59-71.

[6] Tougeron J. Cl. — Idéaux de fonctions différentiables I, *Annales de l'institut Fourier*, Tome XVIII.

[7] Tougeron J. Cl. et Merrien J. — Idéaux de fonctions différentiables II, *Annales de l'institut Fourier*, Tome XX.

Faculté des Sciences de Rennes Beaulieu
Dept. de Mathematique
35 - Rennes

Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 267 à 271.

IDEAUX DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES

par Jean-Claude TOUGERON

Soit $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{O}_p$) l'anneau des germes à l'origine des fonctions numériques, définies et indéfiniment dérivables (resp. analytiques) au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^p$). Notons $C^\infty(n, p)$ l'ensemble des germes à l'origine de $\mathbf{R}^n$ des applications Φ, indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, et telles que $\Phi(0) = 0$.

Il est bien connu que l'anneau $\mathcal{E}_n$ n'est pas noethérien ; en outre, tout germe de fermé à l'origine de $\mathbf{R}^n$ est le germe des zéros $V(\mathcal{J})$ d'un idéal de type fini $\mathcal{J}$ de $\mathcal{E}_n$. Il est donc sans intérêt d'étudier tous les idéaux de $\mathcal{E}_n$. Aussi, avons nous considéré une famille très particulière d'idéaux :

Soit I un idéal de $\mathcal{O}_p$ engendré par des germes $f_1, \ldots, f_q$; nous étudions l'idéal de $\mathcal{E}_n$, noté $\Phi^* I$, engendré par les $f_i \circ \Phi$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Bien entendu, si Φ est quelconque, on ne peut rien dire ; mais nous montrons que, sous des hypothèses de transversalité sur Φ, vérifiées "en général" (nous préciserons ultérieurement cette expression), l'image réciproque $\Phi^* I$ possède des propriétés analogues à celles de I.

Ce travail s'inspire d'une part, de la théorie des singularités des applications différentiables, développée d'abord par H. Whitney et R. Thom (R. Thom étudie les germes d'ensembles $\Phi^{-1}(V(I))$, où $V(I)$ désigne le germe des zéros de I, d'un point de vue topologique, en particulier leur stabilité topologique) ; d'autre part, de résultats de L. Hörmander, S. Łojasiewicz et B. Malgrange, concernant les idéaux de l'anneau $\mathcal{E}_n$, engendrés par des fonctions analytiques (c'est le cas particulier : $n = p$; Φ = identité, de notre problème).

1. **Propriétés généralement vraies (J. Cl. Tougeron, [6]).**

Soit $\mathcal{F}(n, p)$ l'ensemble des séries de Taylor à l'origine de $\mathbf{R}^n$ de tous les $\Phi \in C^\infty(n, p)$; de même, si $q \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathcal{F}^q(n, p)$ l'ensemble des polynômes de Taylor d'ordre q à l'origine de $\mathbf{R}^n$, de tous les $\Phi \in C^\infty(n, p)$. On a des projections évidentes : $T : C^\infty(n, p) \to \mathcal{F}(n, p)$;

$$\pi_q : \mathcal{F}(n, p) \to \mathcal{F}^q(n, p) \quad ; \quad \pi_{q,q'} : \mathcal{F}^{q'}(n, p) \to \mathcal{F}^q(n, p), \text{ si } q' \geqslant q.$$

Pour tout $q \in \mathbf{N}^*$, soit V_q une sous-variété algébrique réelle de $\mathcal{F}^q(n, p)$ et supposons que : $\ldots \supset \pi_q^{-1}(V_q) \supset \pi_{q+1}^{-1}(V_{q+1}) \supset \ldots$

Nous dirons que $V = \bigcap_{q \in \mathbf{N}^*} \pi_q^{-1}(V_q)$ est une sous-variété algébrique de $\mathcal{F}(n, p)$ et par définition, sa codimension sera égale à $\lim_{q \to \infty} \operatorname{codim}_{\mathcal{F}^q(n,p)} V_q$. La variété V