תשובות, פתרונות

I. עליה וירידה של פונקציה. אי-שוויונים

	תחומי העלייה של הפונקציה	תחומי הירידה של הפונקציה
1	$(-\infty, 0.5)$	$(0.5, +\infty)$
2	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
3	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
4	$(0, 100)$	$(100, +\infty)$
5	$(-\infty, +\infty)$	$-$
6	$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

$$7)\ f(x) = e^x - 1 - x \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & (-\infty, 0) & 0 & (0, +\infty) \\ \hline f'(x) & - & & + \\ \hline f(x) & \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$$

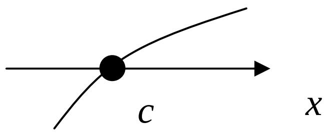
$$\Rightarrow f(x) > 0\ (x \neq 0) \Rightarrow e^x - 1 - x > 0$$

$$8) \begin{cases} f(x) = \ln(1+x) - x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{1+x} < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ x \in (0, +\infty) \quad f(x) \searrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \ln(1+x) - x < 0 \Rightarrow \qquad \ln(1+x) < x$$

$$\begin{cases} g(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0 \Rightarrow \{g(0) = 0, \quad \underset{x \in (0, +\infty)}{g(x) \nearrow}\}$$

$$\Rightarrow \underset{x \in (0, +\infty)}{g(x) > 0} \Rightarrow \ln(1+x) > x - x^2/2 > 0$$



$$f(x) = 2x^3 - 5 + 2x, \quad f'(x) = 6x^2 + 2 > 0 \quad (11.a$$

$$\underset{-\infty < x < +\infty}{f(x) \nearrow} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

הפונקציה $f(x)$ רציפה, מונוטונית עולה לכן למשוואה אם פיתרון קיים אז רק יחיד.

הפונקציה $f(x)$ רציפה ו $f(2) = 15$, $f(0) = -5$ לכן בקטע $(0, 2)$ למשוואה קיים לפחות פיתרון אחד.

כלומר למשוואה $2x^3 = 5 - 2x$ יש שורש ממשי רק אחד.

$$12.\ f(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \quad (\forall x > 1 \quad f'(x) > 0)$$

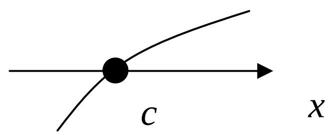
$$f(1) = 0, \quad (\forall x > 1 \quad f(x) \nearrow) \Rightarrow (\forall x > 1 \quad f(x) > 0) \Rightarrow \ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$$

13. הוכח שלמשוואה $x^3 + x + a = 0$ יש בדיוק פתרון ממשי אחד עבור כל a , $a \in \mathbb{R}$.

פוני׳ $f(x)$ רציפה , גזירה ומונוטונית עולה ב $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$-\infty < x < +\infty, \ f(x) \uparrow, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



14 . מה יותר גדול : e^{π} או π^{e} ?

$$f(x)=\frac{e^x}{x^e}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x x^{e-1}(x-e)}{x^{2e}}\quad\Rightarrow\begin{cases}f(e)=1\\ f'(x)>0\quad\text{for}\quad x>e\end{cases}$$

$$\Rightarrow(f(x)>1\ \text{for}\ \ x>e)\Rightarrow f(\pi)>1\Rightarrow\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}>1\Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$$

II חקירת פונקציות ובנית גרפים

II

	1	2	3	4	5	6	
$(x,y)_{\min}$	–	–	$(1,0)$	$(-2,1)$	$(-1,0)$	–	
$(x,y)_{\max}$	$(0.5,\ 2.25)$	–	–	–	$(3,\ 4^4e^{-3})$ $4^4e^{-3}\approx 12.745$	$(0,1)$ if $n=2k-1$ $k=1,2,\dots$	– if $n=2k$ $k=1,2,\dots$

7	$\min\limits_{[-1,\,5]} f(x)=f(-1)=0.5$	$\max\limits_{[-1,\,5]} f(x)=f(5)=32$
8	$\min\limits_{[-3,\,10]} f(x)=f(2)=2$	$\max\limits_{[-3,\,10]} f(x)=f(10)=66$
9	$\min\limits_{[-3,\,1]} f(x)=f(-2)=-24$	$\max\limits_{[-3,\,1]} f(x)=f(-3)=35$
10	$\min\limits_{[1/e,\,e]} f(x)=f(1)=1$	$\max\limits_{[1/e,\,e]} f(x)=f(e)=e^2-2\approx 5.39$
11	$\min\limits_{[0,\,2\pi]} f(x)=f(3\pi/2)=-3$	$\max\limits_{[0,\,2\pi]} f(x)=f(\pi/2)=1$

12) $f(x)=x^5-5x+5,\quad f'(x)=5x^4-5=5(x-1)(x+1)(x^2+1)$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	max $f(-1)=9$	$\downarrow$	min $f(1)=1$	$\uparrow$

בקטע $(-\infty,-1)$ לגרף הפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות, הפונקציה $f(x)$ רציפה, עולה , $f(-1)=9$ לכן בקטע $(-\infty,-1)$ קיים פיתרון אחד למשוואה $f(x)=0$.

בקטע $(-1,1)$ הפונקציה רציפה, יורדת לכן אין פיתרון למשוואה $f(x)=0$ כי

$$\left.\begin{matrix}f(x)>0\\ -1<x<1\end{matrix}\right\}\Leftarrow f(-1)=9,\ f(1)=1$$

בקטע $(1,+\infty)$ אין פיתרון למשוואה $f(x)=0$ (למה?)

תשובה: למשוואה $x^5=5x-5$ יש שורש רק אחד והוא בקטע $(-\infty,-1)$.

למשוואות 15,14,13 יש n שורשים, שורש אחד בקטע $(a,\ b)$

	13	14	15
n	3	1	3
(a,b)	$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$	$(2,+\infty)$	$(-\infty,0),(0,2),(2,+\infty)$

16 . הוכח כי למשוואה $4x=\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)+11$ קיים פתרון יחיד ותחום את הפתרון בקטע שארכו $\frac{1}{4}$.

$$f(x)=4x-\sin(\pi(x+0.5))-11,\quad f'(x)=4-\pi\cos(\pi(x+0.5))>0$$

לכן אם פיתרון קיים אז רק אחד.

$$4x=\sin(\pi(x+0.5))+11\,,\quad \begin{cases}\sin(\pi(x+0.5))=4x-11\\ |\sin x|\le 1\end{cases}\Rightarrow$$

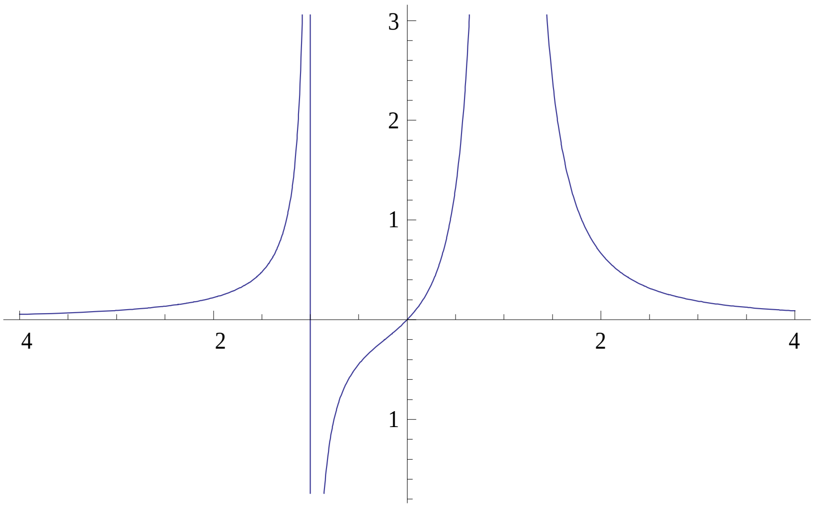
$$|4x-11|\le 1\Rightarrow 2.5\le x\le 3\qquad f(2.5)=-1,\ f(3)=2$$

$$f(2.75)=-\sin 3.25\pi=-\sin(-0.75\pi)=\sin(0.75\pi)>0$$

19) תחום הגדרה ותחום רציפות: $x\neq\pm 1$. אסימפטוטות: $y=0$ אשר $x\to\pm\infty$, וגם $x=\pm 1$.

$f'=\dfrac{2x^2-x+1}{(1+x)^2(1-x)^3}$, תחומי עליה: $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$. תחום ירידה: $(1,\infty)$. אין נקודות קיצון.

חיתוך אם צירים: $(0,0)$.



25) פונקציה בעלת מחזור 2π, רציפה ובעלת נגזרות רציפות. מספיק להתבונן בקטע $(-\pi,\pi]$.

$f'=\cos(x)(1-2\sin(x))$, נקודות קריטיות:

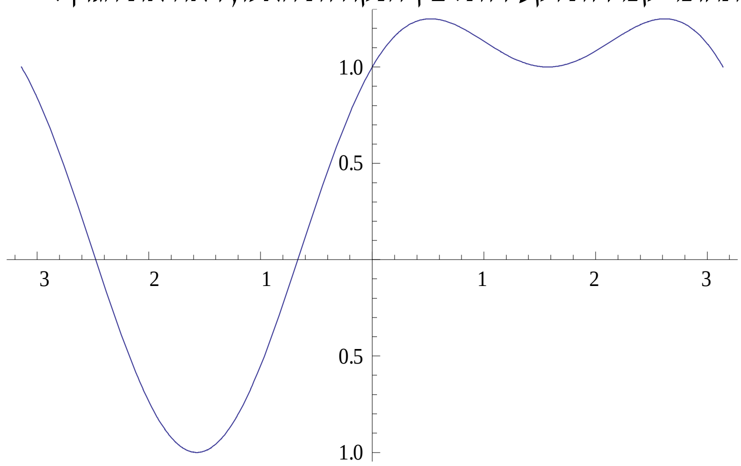
$$x_1=-\frac{\pi}{2}\ (\min),\ x_2=\frac{\pi}{6}\ (\max),\ x_3=\frac{\pi}{2}\ (\min),\ x_4=\frac{5}{6}\pi\ (\max)$$

תחומי עליה: $(x_1,x_2),(x_3,x_4)$. אסימפטוטות: אין.

הנגזרת $f''=2\sin^2(x)-\sin(x)-1$ מתאפסת כאשר $\sin(x)=(1\pm\sqrt{33})/8$. נקודות פיתול הן

$\arcsin((1+\sqrt{33})/8),\ \pi-\arcsin((1+\sqrt{33})/8)$ ו- $\arcsin((1-\sqrt{33})/8)$, $-\pi-\arcsin((1-\sqrt{33})/8)$.

תחומי קמירות וקעירות: בין הנקודות האלו, ראה את הגרף.



בעיות קיצון III

1) $p = 2x + 2y,\ S = x\ y,\ \ x > 0,\ y > 0$

$S \max \Rightarrow x = y = P/4$

2) $M = x + y,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ Q = x^2 + y^2$

$Q \min \Rightarrow x = y = M/2$

3) $V = \pi R^2 H,\ S = 2\pi RH + 2\pi R^2$

$S \min \Rightarrow R = \sqrt[3]{V/(2\pi)},\ H = 2\ R$

4) $V_{\max} = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9} R^3$