

גבולות של פונקציות

I הגדרת הגבול של פונקציה לפי היינה (Heine)

$$1. \text{ הוכח כי : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

רשום הגדרות לטענות הבאות והבא דוגמאות מתאימות:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b & .4 & \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b & .3 & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b & .2 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty & .7 & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b & .6 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b & .5 \end{array}$$

II חשב את הגבולות הבאים :

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} & 4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} & 7. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} \\ 8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} & 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} & 10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x-2}} & 11. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \\ 12. \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} & 13. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} & 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \\ 15. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] & 16. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \end{array}$$

III חשב את הגבולות הבאים :

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} & 3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 4x} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} \\ 6. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot 3x & 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} & 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \\ 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} & 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(10\pi x)}{\tan 5x} & 12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 5x}{2x} & 13. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan 2x) \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ 14. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} & 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arctan x}{2x + \arcsin x} & 16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} & 17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+9} - 3} \\ 18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - \sin 3x}{x + \cos 2x} & 19. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right) & 20. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} & 21. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \\ 22. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} & 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x} & 24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \end{array}$$

IV חשב את הגבולות הבאים :

$$\begin{array}{llll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} \\ 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{x^3 / (1-x)} & 6) \lim_{x \rightarrow (\pi/4)^+} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} & 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{(x-1)/(x+1)} \\ 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x} & 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x & 11) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} \end{array}$$

- 12) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$ 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n$ 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$
- 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x]$ 17) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}, (a > 0)$ 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$
- 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right)$ 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{1/x}$ 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$
- 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$ 23) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2}, (x > 0)$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, (a > 0)$ 25) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}$ 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$
- 27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$ 29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- 30) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ 31) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ 32) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$ 34) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$
- 35) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$ 36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$ 37) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sqrt{\left| \cos \frac{1}{x} \right|}$ 38) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \right)$