

I נגזרת מסדר גבוה

תהינה $u(x), v(x)$ גזירות פעמיים. חשב את y'' כאשר :

$$1) y = u^2 \quad 2) y = \ln \frac{u}{v} \quad 3) y = \sqrt{u^2 + v^2}$$

4) פונקציית הדרך של חלקיק פיסיקלי לאורך הישר היא $s(t) = 10 + 20t - 5t^2$. מה תהיה מהירות ותאוצה של החלקיק בזמן $t_0 = 2$

5) הוכח כי פוני $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ מקיימת את השוויון $2(y')^2 - y \cdot y'' = 2y^3$.

6) הוכח כי פוני $y = \sin \ln x + \cos \ln x$ היא פתרון של המשוואה $x^2 y'' + x y' + y = 0$.

II משפט לופיטל

חשב את הגבולות הבאים :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3x} \quad 7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}, \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad 9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon}, (\varepsilon > 0) \quad 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{ax}}, a > 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2} \quad 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} \quad 13) \lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0+} x^x \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0+} x^\varepsilon \cdot \ln x, (\varepsilon > 0) \quad 16) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, (a > 0)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} \quad 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

III שאלות מן המבחנים

1.) הוכח שלמשוואה $x^{179} + \frac{163}{1+x^2 + \sin^2 x} = 119$ יש פתרון.

2.) חשב: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log \sin(1/x)}$

3.) עבור $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

בדוק את הרציפות והגזירות של הפונקציות $f(x), g(x)$ בנקודה $x = 0$.

4) חשב את הגבול: $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{x}{\sin(x-3)}}$

(א) ללא שמוש בכלל לופיטל (ב) באמצעות כלל לופיטל

5) עבור אלו ערכים b, a פונקציה $f(x) = \begin{cases} x^{a/(1-x)}, & x < 1 \\ e^2, & x = 1 \\ \frac{\sin(bx-b)}{e^{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$ תהיה רציפה בתחום הגדרתה?

6) הוכח שלמשוואה $\ln x = \frac{1}{x}$ יש לפחות פתרון אחד.

IV תרגילי חזרה

1. באלו נקודות של העקומה $y = 2 + x - x^2$ המשיק אליה

(א) מקביל לציר Ox ? (ב) מקביל לחוצה הזוית של הרביע הראשון?

2. באיזו זוית הגרף של הפונקציה $y = \ln x$ חוצה את הציר Ox ?

3. באילו זויות נפגשות העקומות $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$? $\left(\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right)$

4. באיזו זוית נפגשות העקומות $y = \sin x$, $y = \cos x$ ($0 < x < \pi/2$)

תשובות

I

$$1) 2(uu'' + (u')^2) \quad 2) \frac{uu'' - (u')^2}{u^2} - \frac{vv'' - (v')^2}{v^2} \quad 3) \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - uv')^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

$$4) v(2) = s'(0) = 0, a(2) = s''(0) = -10$$

II	1	2	3	4	5	6	7	8	9,10,11,12,13,15	14	16	17	18
	$\frac{a}{b}$	2	-2	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{a^2}{b^2}$	0	1	$a^a(\ln a - 1)$	$\frac{1}{e}$	$-\frac{e}{2}$

$$\text{III } 1) f(x) = x^{179} + \frac{163}{1+x^2 + \sin^2 x} - 119 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(0) = 163 - 119 > 0 \end{cases}$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3} = \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3} = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\log \sin(1/x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \sin(1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{x \cos(1/x)(-1/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \frac{-1}{\cos(1/x)} = -1 \end{aligned}$$

לכן

$$3) (\ln |x|)' = \left(\begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \right)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{x^{-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = -0.5 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \dots = 0$$

. $x = 0$ רציפות בנקי $f(x), g(x)$

$$(\ln |x|)' = \left(\begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \right)' = \frac{1}{x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \ln |\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x \cdot \ln |\Delta x|) = 0$$

$$g'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x) \ln |\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\ln |\Delta x|) = -\infty$$

לכן $f(x)$ גזירה בנקי $x = 0$, $g(x)$ איננה גזירה בנקי $x = 0$

$$4) e^9 \quad 5) a = -2, b = 2$$

IV

$$1) a) (0.5, 2.25) \quad b) (0, 2) \quad 2) \pi/4 \quad 3) \pi/2, \arctan(0.75) \quad 4) \arctan(2\sqrt{2})$$