I. פונקציות היפרבוליות

הגדרה: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $e \approx 2.718$

חקור את הזוגיות של הפונקציות הבאות: $\tanh x$, $\sinh x$, $\cosh x$

הוכח את הזהויות הבאות:

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 2) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$ 3) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

4) $\sinh(a+b) = \sinh a \ \cosh b + \sinh b \ \cosh a$ 5) $\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a$

חשב את הגבולות הבאים:

6) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sinh x - \cosh x)$ 7) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sinh x - \cosh x)$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} (5 \sinh 2x - \cosh 3x)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$ 10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \tanh x$ 11) $\lim\limits_{x\to 0} 3\tanh 4x$

נתונות הפונקציות $f(x), g(x)$. מצא את הפונקציה המורכבת $F(x) = f(g(x))$:

12) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = 3\cosh x$ 13) $f(x) = \sinh x$, $g(x) = \ln x$

14) $f(x) = \sqrt{(4 - x^2)^3}$, $g(x) = 2\tanh x$

מצא את נקודות אי-הרציפות עבור הפונקציות הבאות וקבע את סוגיהן:

15) $f(x) = \cosh \dfrac{3}{x-1}$ 16) $f(x) = \tanh \dfrac{1}{x}$

גזור את הפונקציות הבאות:

17) $y = \sinh^2 3x$ 18) $y = \ln \sinh x$ 19) $y = \arctan(\tanh x)$ 20) $y = \cosh(\sinh x)$

II. נוסחת טיילור

עבור הפונקציה $f(x)$ רשום את הפולינום טיילור מסדר n סביב הנקודה x_0

1) $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$, $x_0 = -1$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $n = 2$

3) $f(x) = \cosh(2x - 2)$, $x_0 = 1$, $n = 2$

4} מצא הפולינום $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ אם נתון כי $p(2) = -1,\ p'(2) = 0,\ p''(2) = 4,\ p'''(2) = -6$. חשב $p(-1),\ p'(0)$.

רשום פולינום מקלורן מסדר n עבור הפונקציות הבאות:

5) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, $n = 3$, $f''(0) = ?$ $f'''(0) = ?$ 6) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{10}}{(1 - 4x^2)^4}$, $n = 2$

7) $f(x) = \ln\cos x$, $n = 3$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{a^3 + x}$, $(a > 0)$, $n = 2$

9) $f(x) = \sin(\sin x)$, $n = 3$ 10) $f(x) = e^{2x - x^2}$, $n = 2$ 11) $f(x) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$, $n = 3$

תוך שימוש בפיתוחי היסוד רשום את הפולינום טיילור מסדר n סביב הנקודה x_0 עבור הפונקציה $f(x)$

12) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $n = 2$ 13) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = -1$, $n = 2$

14) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi/2$, $n = 2$ 15) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 2$

הערך את השגיאה בנוסחאות המקורבות הבאות:

16) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$, $0 \le x \le 0.1$ 17) $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$, $0 \le x \le 1$

18) $\sin x \approx x - x^3/6, |x| \le 0.5$

19) עבור אילו ערכים של x מתקיים בדיוק עד 10^{-4} השוויון המקורב $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$?

חשב בקרוב באמצעות נוסחת טיילור מסדר 2 . הערך את השגיאה 20) $\sqrt[3]{30}$ 21) $\ln 1.2$

חשב את המספרים הבאים בדיוק עד כדי ε : 22) $\sqrt{e}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ 23) $\sin 18^0$, $\varepsilon = 10^{-4}$

חשב את הגבולות הבאים תוך שימוש בפיתוחי היסוד:

24) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 25) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ 26) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$ 28) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$, $(a>0)$ 30) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ 32) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$ 33) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

עבור הפונקציה $f(x)$ קבע את האיבר הראשי מהצורה Cx^n $(C = const)$ כאשר $x \to 0$

34) $f(x) = (1+x)^x - 1$ 35) $f(x) = 1 - \frac{(1+x)^{1/x}}{e}$

תשובות

I

6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	$-\infty$	-1	1	-1	0	$3\lvert\sinh x\rvert$	$(x^2-1)/(2x),\quad x>0$	$8/\left(\cosh^3 x\right)$

נקודות אי רציפות :

סוג שני	סוג ראשון
$x=1$ (15	$x=0$ (16

.31 (17 $y'_x=3\sinh 6x$ (18 $y'_x=\dfrac{1}{\tanh x}$ (19 $y'_x=\dfrac{1}{\cosh 2x}$ (20 $y'_x=\sinh(\sinh x)\cdot\cosh x$

II

1) $f(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$ 2) $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+R_2(x)$

3) $1+2(x-1)^2+R_3(x)$

4) $p(x)=-1+2(x-2)^2-(x-2)^3,\ \ p(-1)=44,\ \ p'(0)=-20$

5) $1+2x+2x^2+o(x^3),\ f''(0)=4,\ f'''(0)=0$ 6) $1+10x+61x^2+o(x^2)$

7) $-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ 8) $a+\dfrac{x}{3a^2}-\dfrac{x^2}{9a^5}+o(x^2)$ 9) $x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

10) $1+2x+x^2+o(x^2)$ 11) $-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)$ 12) $\sqrt{x}=\sqrt{4+(x-4)}=2\cdot\sqrt{1+\dfrac{x-4}{4}}=$

$$=2\left(1+\frac{x-4}{4\cdot 2}-\frac{(x-4)^2}{16\cdot 8}+o((x-4)^2)\right)=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+o((x-4)^2)$$

13) $\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{2}{e^2}(x+1)+\dfrac{2}{e^2}(x+1)^2+o((x+1)^2)$

14) $\sin 2x=\sin(\pi-2x)=-\sin(2(x-\pi/2))=-2\left(x-\pi/2\right)+o\left(\left(x-\pi/2\right)^2\right)$

15) $1+\dfrac{x-e}{e}-\dfrac{(x-e)^2}{2e^2}+o((x-e)^2)$

16) $f(x)=\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}+R_1(x),\quad R_1(x)=\dfrac{f''(C)}{2}x^2=-\dfrac{1}{4(1+C)^{3/2}}x^2=,0<C<0.1$

$$\left|R_1(x)\right|<\frac{1}{4}x^2\le\frac{0.01}{4}=0.0025,\quad 0\le x\le 0.1\quad\Rightarrow\quad\left|\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right|<0.0025$$

17) $0\le x\le 1\Rightarrow\left|e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\ldots-\dfrac{x^n}{n!}\right|<\dfrac{e}{(n+1)!}$

18) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} = R_4(x) = \frac{f^{(5)}(C)}{5!}x^5 = \frac{\cos C}{5!}x^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow |R_4(x)| \le \frac{1}{5!}\frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}$ $\left(|x| \le 0.5 \Rightarrow \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le \frac{1}{3840}\right)$

19) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x),\quad |R_3(x)| = \frac{|\cos C|}{4!}x^4 \le \frac{x^4}{4!} \le \frac{1}{10^4} \Rightarrow |x| \le \frac{\sqrt[4]{24}}{10} \approx 0.22$

$|x| \le 0.22 \Rightarrow \left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le 10^{-4}$

20) $\sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+1/9} = 3\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{1}{9\cdot 81}\right) \approx 3.107$, $\varepsilon \approx 0.00025$

21) $\ln 1.2 \approx 0.18$, $R_2(x) = \frac{2}{(1+C)^3}\frac{x^3}{6}$, $\varepsilon \approx 0.003$

22) $f(x) = e^x$, $0 < c < 0.5$, $R_n(0.5) < \frac{e^{0.5}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{2^n(n+1)!} \Rightarrow R_2 < \frac{1}{24}$, $R_3 < \frac{1}{192}$,

$R_4 < \frac{1}{1920} < 10^{-3}$, $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} \approx 1.648$

23) $\sin 18^0 = \sin\frac{\pi}{10}$, $\left|R_2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| < \frac{0.3142^3}{3!} \approx 0.0052$, $\left|R_4\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| < \frac{0.3142^5}{5!} \approx 0.000026$

$\sin 18^0 \approx 0.3142 - \frac{0.3142^3}{3!} \approx 0.3090$

24) $-\frac{1}{12}$ 25) $\frac{1}{3}$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} - 2\right) = \ldots = -\frac{1}{4}$

27) $\frac{1}{3}$ 28) $\frac{1}{6}$ 29) $\ln^2 a$ 30) $\frac{1}{2}$ 31) 0 32) $\frac{1}{3}$ 33) $\frac{1}{2}$

34) x^2 35) $\frac{x}{2}$

34) $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$, $x\ln(1+x) = x(x+o(x)) = x^2 + o(x^2)$

$(1+x)^x = e^{x^2+o(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^2)$

$(1+x)^x - 1 = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 = x^2 + o(x^2)$