

I. עליה וירידה של פונקציה. אי-שוויונים.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות :

- 1) $f(x) = 2 + x - x^2$ 2) $f(x) = 3x - x^3$ 3) $f(x) = 2x / (1 + x^2)$
 4) $f(x) = \sqrt{x} / (x + 100)$ 5) $f(x) = x + \sin x$ 6) $f(x) = x^2 - \ln x^2$

הוכח את אי-השוויונים הבאים :

7) $e^x > 1 + x, x \neq 0$ 8) $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x, x > 0$

9) $x - x^3/6 < \sin x < x, x > 0$ 10) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3, 0 < x < \pi/2$

11. הוכח כי למשוואות הבאות יש פתרון ממשי אחד

a) $2x^3 = 5 - 2x$ b) $x^5 + 5x^3 + 10x = 30$

שאלות מן המבחן

12. הוכח שעבור $x > 1$ מתקיים אי-השוויון $(x+1)\ln x > 2(x-1)$.

13. הוכח שלמשוואה $x^3 + x + a = 0$ יש בדיוק פתרון ממשי אחד עבור כל $a \in \mathbf{R}$.

14. מה יותר גדול: e^π או π^e ?

II. חקירת פונקציות ובנית גרפים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

- 1) $f(x) = 2 + x - x^2$ 2) $f(x) = (x-1)^3$ 3) $f(x) = (x-1)^4$ 4) $f(x) = |x|$
 5) $f(x) = (x+1)^4 e^{-x}$ 6) $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}, (n \in \mathbf{N})$

מצא את המקסימום והמינימום מוחלט של הפונקציות הבאות בקטע נתון :

7) $f(x) = 2^x, [-1, 5]$

10) $f(x) = x^2 - 2 \ln x, [1/e, e]$

8) $f(x) = x^2 - 4x + 6, [-3, 10]$

11) $f(x) = 2 \sin x - 1, [0, 2\pi]$

9) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8, [-3, 2]$

בכל אחת מהמשוואות הבאות קבע את מספר השורשים הממשיים והפרד ביניהם :

12) $x^5 = 5x - 5$ 13) $x^5 = 5x + 1$ 14) $x^3 = 3x^2 + 1$ 15) $x^3 = 3x^2 - 1$

16. הוכח כי למשוואה $4x = \sin \pi(x + 0.5) + 11$ קיים פתרון יחיד ותחום את הפתרון בקטע שארכו $\frac{1}{4}$.

חקור את הפונקציות הבאות לפי השלבים הבאים : תחום ההגדרה, התנהגות של פונקציה ב"קצות" התחום, תחומי רציפות ונקודות אי-רציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות או אי-זוגיות, מחזוריות, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול (רק כאשר הנגזרת השנייה של הפונקציה איננה מסובכת) בנה את הגרפים של הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{llll}
 17) y = 3x - x^3 & 18) y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4} & 19) y = \frac{x}{(1 + x)(1 - x)^2} & 20) y = \frac{x^4}{(1 + x)^3} \\
 21) y = (x - 3)\sqrt{x} & 22) y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}} & 23) y = \sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} & \\
 24) y = (x + 2)^{2/3} - (x - 2)^{2/3} & 25) y = \sin x + \cos^2 x & 26) y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x & \\
 27) y = x + e^{-x} & 28) y = x^{2/3} e^{-x} & 29) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & 30) y = x + \operatorname{arctg} x \\
 31) y = (x + 2)e^{1/x} & 32) y = \cosh x & 33) y = \sinh x & 34) y = \tanh x
 \end{array}$$

III בעיות קיצון

1. מבין כל המלבנים שהיקפם P , מהן צלעות המלבן ששטחן מקסימלי ?
2. סכום שני מספרים אי-שליליים שווה ל- M . מה צריכים להיות שני המספרים כדי שסכום ריבויים יהיה מינימלי ?
3. מבין כל הגלילים בעלי נפח נתון V מצו את הגליל בעל שטח פנים מינימלי.
4. מצא את נפחו המקסימלי של גליל שניתן לחסום בתוך כדור שרדיוסו R .