אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 12.12.2013
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
בוחן ב: **חדו"א 1 לביוטכנולוגיה**
מס' הקורס: 201.1.9561
סמ' א משך הבוחן- 2 שעות

חומר עזר: **דף נוסחאות A4 אחד**

יש לענות על כל 4 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות).
נא ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

1א. (10 נק') הגדירו את המושג גבול של סדרה .

$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר n_0 כך
שאם $n>n_0$ אז $|a_n-a|<\varepsilon$.

1ב. (15 נק') חשבו את הגבול הבא: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

אז

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=e\cdot e\cdot 1=e^2$$

שאלה מס' 2. חשבו את הגבולות הבאים:

2א) (12 נק') $A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x - \ln(\ln x)}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x - \ln(\ln x)}{\sqrt{x}} \overset{\text{לופ.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{\ln x}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to\infty}} = 0$$

תשובה: $A = e^0 = \underline{\underline{1}}$

2ב) (13 נק') $A = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{1-2x^2}}{\sin^2 x}$

$$\frac{\cos x - \sqrt{1-2x^2}}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1 + 2x^2}{\sin^2 x(\cos x + \sqrt{1-2x^2})} =$$

$$= \frac{2x^2 - \sin^2 x}{\sin^2 x(\cos x + \sqrt{1-2x^2})} = \frac{2\frac{x^2}{\sin^2 x} - 1}{\cos x + \sqrt{1-2x^2}}$$

$$A = \frac{\lim_{x\to 0}\left(2\frac{x^2}{\sin^2 x} - 1\right)}{\lim_{x\to 0}(\cos x + \sqrt{1-2x^2})} = \frac{2-1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

שאלה מס' 3.

3א) (8 נק') נסחו את המשפט טיילור.

אם בסביבת נקודה a פונקציה $f(x)$ בעלת $(n+1)$ נגזרות, אזי בסביבה זו

$$f(x)=\underbrace{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)}+R_n(x).$$

כאשר שארית

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

כאשר נקודה c היא בין x לבין a.

($P_n(x)$ נקרא פולינום של טיילור)

3ב) (8 נק') עבור פונקציה $f(x)=\text{arctg}(x)$ רשמו פולינום של מקלורן ממעלה שתיים $T_2(x)$ (פולינום טיילור בסביבה של נקודה $a=0$).

$f(0)=\text{arctg}(0)=0 \qquad f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0)=0.$

$$T_2(x)=0+1\cdot(x-0)+0\cdot(x-0)^2=\underline{\underline{x}}$$

3ג) (9 נק') השתמשו בנוסחת טיילור כדי להוכיח כי $A=|\text{arctg}(0.5)-T_2(0.5)|<\frac{0.5^3}{3}$

$A=|R_2(0.5)|=\frac{|f'''(c)|}{6}0.5^3, \qquad 0<c<0.5$

$f'''(x)=-2\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \qquad 1+x^2>1\Rightarrow$

$|f'''(c)|<|6c^2-2|=2-6c^2<2$

בקטע $0<c<0.5$.

אז

$A<\frac{2}{6}0.5^3=\frac{1}{3}0.5^3$

שאלה מס' 4.

4א) (18 נק')

נתונה פונקציה
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}(x)-\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

האם הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\cos\Delta x}{\sin\Delta x}-\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\cos\Delta x-\sin\Delta x}{\Delta x^{2}\cdot\sin\Delta x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos\Delta x=1-\frac{\Delta x^{2}}{2}+O(\Delta x^{4})\\ \sin\Delta x=\Delta x-\frac{\Delta x^{3}}{3!}+O(\Delta x^{5})\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(1-\frac{\Delta x^{2}}{2}+O(\Delta x^{4})\right)-\Delta x+\frac{\Delta x^{3}}{6}+O(\Delta x^{5})}{\Delta x^{2}\cdot(\Delta x+O(\Delta x^{3}))}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{\Delta x^{3}}{3}+O(\Delta x^{5})}{\Delta x^{3}+O(\Delta x^{5})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+O(\Delta x^{2})}{1+O(\Delta x^{2})}=-\frac{1}{3}$$

<u>תשובה:</u> הפונקציה גזירה בנק' $x=0$.

4ב) (7 נק') הסבירו מדוע כאשר פונקציה $y=g(x)$ גזירה בנקודה $x=a$ הפונקציה גם רציפה בנקודה זו.

<u>פתרון ראשון:</u>

$g(x)$ רציפה בנק' $x=a$ אם $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ או

$$\lim_{x\to a}\left(g(x)-g(a)\right)=0$$

בגלל שקיימת

$$g'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

מקבלים:

$$\lim_{x\to a}\left(g(x)-g(a)\right)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot(x-a)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=g'(a)\cdot 0=0$$

אז $g(x)$ רציפה בנק' $x=a$.

<u>פתרון שני:</u> אם קיים

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

אז

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)+\alpha(x-a)$$

עם פונקציה $\alpha(x-a)\xrightarrow[x\to a]{}0$.

אז

$$g(x)-g(a)=g'(a)(x-a)+\alpha(x-a)\cdot(x-a)\xrightarrow[x\to a]{}0.$$