

תאריך הבוחן 13.12.2012
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
בוחן ב: חדו"א 1 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 201.1.9561
סמ' א משך הבוחן- 2 שעות



אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

חומר עזר: דף נוסחאות A4 אחד

**יש לענות על כל 4 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות).
נא ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטייטה השתמשו בדפי טייטה (מיועדים לגריסה).**

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1. חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right]$$

$$S_n = a_0 + (a_0+d) + \dots + (a_0 + d(n-1)) = na_0 + d \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_0 = 1, d = 2 \Rightarrow 1+3+\dots+(2n-1) = n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+3} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{n+3} = -3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{n}} = \underline{\underline{-3}}$$

שאלה מס' 2. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{1/x} \quad (\text{נ2 (13) נק'})$$

$$\left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} (\ln(1+x) - \ln(1+2x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x} \stackrel{\text{Lop.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+2x} \right) = -1$$

SIC

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{e^{-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \quad (\text{נ2 (12) נק'})$$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{x+1 - x} =$$

$$= \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right) =$$

$$\underline{\underline{=}} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \underline{\underline{2}}$$

שאלה מס' 3.

רשמו פולינום של טיילור $f(x) = \sin\{2\ln(1+3x)\}$ עבור פונקציה (13 נק') (א3)
ממעלה שתיים $T_2(x)$ בסביבה של נקודה $a=0$.

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(2\ln(1+3x)) \cdot \frac{2}{1+3x} \cdot 3 = \frac{6}{1+3x} \cos(2\ln(1+3x))$$

$$f'(0) = 6$$

$$f''(x) = -\frac{18}{(1+3x)^2} \cos(2\ln(1+3x)) - \left(\frac{6}{1+3x}\right)^2 \sin(2\ln(1+3x))$$

$$f''(0) = -18$$

$$T_2 = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = \underline{\underline{6x - 9x^2}}$$

(ב3) (12 נק') השתמשו בנוסחת טיילור כדי להציג את הפולינום

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 4x^2 - x + 2$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^4 a_n (x-1)^n \text{ כלומר, } x-1 \text{ של פולינום}$$

$$x_0 = 1 \text{ נר } 718''6 \text{ נ } 1101 \text{ נ } 5$$

$$P(x) = T_5(x) + R_5(x)$$

כאשר $R_5(x) = 0$ ולכן $P^{(6)}(x) = 0$ ולכן $P(x) = T_5(x)$

$$P(x) = T_5(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \dots + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5$$

$$P(1) = 2 - 5 + 1 + 4 - 1 + 2 = 3$$

$$P'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 3x^2 + 8x - 1$$

$$P'(1) = 10 - 20 + 3 + 8 - 1 = 0$$

$$P''(x) = 40x^3 - 60x^2 + 6x + 8$$

$$P''(1) = 40 - 60 + 6 + 8 = -6$$

$$P'''(x) = 120x^2 - 120x + 6$$

$$P'''(1) = 6$$

$$P^{IV}(x) = 240x - 120$$

$$P^{IV}(1) = 120$$

$$P^V(x) = 240$$

$$P(x) = 3 - \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{240}{5!}(x-1)^5 =$$

$$= 3 - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + 5(x-1)^4 + 2(x-1)^5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x^2)}{e^x + e^{-x} - 2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$$

שאלה מס' 4. נתונה פונקציה

(א4) (12 נק') עבור איזה ערך של k הפונקציה רציפה בנקודה $x = 0$?

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k$ כאשר $x = 0$ הנק' $f(x)$ רציפה

1/1710

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \stackrel{Lop.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x \cos 5x^2}{e^x - e^{-x}} \stackrel{Lop.}{=} \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 \cos 5x^2 - 100x^2 \sin 5x^2}{e^x + e^{-x}} = \frac{10 - 0}{1 + 1} = 5$$

$$\sin z = z + O(z^3)$$

$$\sin 5x^2 = 5x^2 + O(x^6) \quad sic$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\frac{\sin 5x^2}{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{5x^2 + O(x^6)}{[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)] + [-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)] - 2}$$

$$= \frac{5x^2 + O(x^6)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{5 + O(x^4)}{1 + O(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 5$$

$k = 5$ כאשר $x = 0$ הנק' f רציפה

ב4 (13 נק') האם הפונקציה תהיה אז גם גזירה בנקודה $x = 0$? אם כן, חשבו $f'(0)$.

יש להשתמש בלמה (2) (מתון 2):

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5h^2}{e^h + e^{-h} - 2} - 5}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(5h)^2 - 5(e^h + e^{-h} - 2)}{h(e^h + e^{-h} - 2)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{5h^2 + O(h^6)\} - 5\{h^2 + O(h^4)\}}{h(h^2 + O(h^4))} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h^4)}{h^3 + O(h^5)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{1 + O(h^2)} = 0$$

תשובה: הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$