אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 18.11.2014
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
בוחן ב: <u>**חדו"א 1 לביוטכנולוגיה**</u>
מס' הקורס: 201.1.9561
סמ' א משך הבוחן- 2 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות A4 אחד (שני צדדים)

יש לענות על כל 4 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות).
נא לפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד.
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1. **תנו הגדרה לגבול של סדרה (12 נק').**

הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, **אז קיים** $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ **(13 נק').**

א) מס' a הוא גבול של סדרה $\{a_n\}$ אם לכל $\varepsilon>0$
קיים מס' טבעי n_0 כך שאם $n>n_0$ מתקיים
$|a_n - a| < \varepsilon$

ב) יהי נתון $\varepsilon>0$.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n-b) - b(a_n-a)| \le$$
$$\le |a_n||b_n-b| + |b||a_n-a|$$

כל סדרה מתכנסת חסומה. אז קיים מס' M כך שלכל n, $|a_n|<M$.

נסמן $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|b|}$.

קיים n_0 כך שאם $n>n_0$

$|a_n - a| < \varepsilon_2$, $|b_n - b| < \varepsilon_1$

אז עבור כל $n>n_0$

$$|a_n b_n - ab| \le |a_n||b_n-b| + |b||a_n-a| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

שאלה מס' 2.

א2) (13 נקי) **נתונה פונקציה** $f(x)=\left(\sin\left\{\sqrt{|x|}\right\}\right)^5$. **מצאו את הנגזרת** $f'(x)$.

האם הנגזרת קיימת עבור כל x **?** **<u>הסבירו!</u>**

1) $x>0.$ $\quad f(x)=\sin^5\sqrt{x}$

$$\frac{df}{dx}=5\sin^4\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $x<0.$ $\quad f(x)=\sin^5\sqrt{-x}$

$$\frac{df}{dx}=5\sin^4\sqrt{-x}\cdot\cos\sqrt{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}}\cdot(-1)=$$

$$=-5\sin^4\sqrt{|x|}\cos\sqrt{|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

3) $x=0$

$$\frac{df}{dx}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^5\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\cdot\frac{\sin^5\sqrt{|\Delta x|}}{|\Delta x|}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}_{\text{חסום}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\sqrt{|\Delta x|}}{\sqrt{|\Delta x|}}\right)^5}_{\text{שואף ל-1}}\cdot\underbrace{|\Delta x|^{\frac{3}{2}}}_{\text{שואף ל-0}}=0$$

<u>תשובה:</u>

$$f'(x)=\begin{cases}5\sin^4\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x=0\\ -5\sin^4\sqrt{-x}\cdot\cos\sqrt{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x<0\end{cases}$$

(הנגזרת קיימת עבור כל x)

2ב) (12 נק') מצאו גבול $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \overset{\text{לופ.}}{=} \lim_{x\to -8}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{64}}} = -2$$

שאלה מס' 3.

3א) (12 נק') חשבו את הגבול הבא:

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$A = \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\cos x - \ln\cos 2x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x - \ln\cos 2x}{x^2} \underset{\text{לופ.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos x}\sin x + \frac{2}{\cos 2x}\sin 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\underset{\downarrow\ -1/2}{-\frac{1}{2\cos x}} \cdot \underset{\downarrow\ 1}{\frac{\sin x}{x}} + \underset{\downarrow\ 2}{\frac{2}{\cos 2x}} \cdot \underset{\downarrow\ 1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

תשובה: $A = e^{3/2}$

3ב) (13 נק') נתונה פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ k & x=0 \end{cases}$$

מה צריך להיות ערך של k כדי ש- $f(x)$ תהיה רציפה ב- $x=0$?

האם $f(x)$ תהיה אז גזירה ב- $x=0$? אם כן, מהי $f'(0)$?

1)

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x\sin x}_{\downarrow\, 0}\,\underbrace{\sin\tfrac{1}{x}}_{\text{חסומ}} = 0 \Rightarrow k=0$$

2)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\sin x}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\sin\tfrac{1}{x}}_{\text{חסומ}}=0$$

<u>תשובה:</u> $k=0$, קיימת $f'(0)=0$.

שאלה מס' 4. <u>השתמשו בנוסחת טיילור</u> כדי לחשב גבולות:

א) **(13 נק')** $\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)}_{A(x)}$

$$A(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+O(x^5)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)}{x^2\left(x+O(x^3)\right)}=$$

$$=\frac{x^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)+O(x^5)}{x^3+O(x^5)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{3}$$

ב) **(13 נק')** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\underbrace{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)}_{A(x)}$

$$A(x)=x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=$$

$$=x^2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4\cdot 2!}\cdot\frac{1}{x^2}+O(x^{-3})+\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4\cdot 2!}\cdot\frac{1}{x^2}+O(x^{-3})-2\right)\right)=$$

$$=x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-2}+O(x^{-3})\right)=-\frac{1}{4}+O(x^{-1})\xrightarrow[x\to\infty]{}\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$