

טורים מספריים

I. הוכח ישירות, לפי ההגדרה, את התכנסות הטורים הבאים וחשב את סכומיהם

$$1. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \quad 2. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots$$

$$3. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \quad 4. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

II. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן האינטגרל :

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 1} \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad 3. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5} \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1 + n^2}$$

III. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש בתנאי הכרחי להתכנסות הטור ובמבחני השוואה :

$$1. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad 2. 0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \sqrt[4]{0.001} + \dots$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \frac{1}{4\sqrt{5}} + \dots \quad 4. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \frac{1}{4001} + \dots$$

$$5. \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \dots \quad 6. 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$7. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad 8. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 9}} + \dots$$

$$9. \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \dots \quad 10. \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \dots$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}$$

IV. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן דלמבר :

$$1. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \quad 2. \frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \frac{4!}{10^4} + \dots$$

$$3. \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \frac{1000^4}{4!} + \dots \quad 4. \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \frac{(3!)^2}{6!} + \frac{(4!)^2}{8!} + \dots$$

V. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן קושי :

$$1. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \frac{1}{\ln^4 5} + \dots \quad 2. \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

VI. חקור את התכנסות הטורים הבאים :

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad 4. \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$ 7. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$
9. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$ 11. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-3}{3n^2+1} \right)^n$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ 15. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln^3 n}}$

טורים כלליים

VII. בדוק התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות של הטורים הבאים:

1. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ 2. $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$
3. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$ 4. $\frac{\sin \alpha}{1} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} - \frac{\sin 4\alpha}{16} + \dots$
5. $1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots$ 6. $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$
7. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$ 8. $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \frac{64}{16} + \frac{125}{32} - \dots$
9. $\frac{1}{3 \ln^2 3} - \frac{1}{4 \ln^2 4} + \frac{1}{5 \ln^2 5} - \frac{1}{6 \ln^2 6} + \dots$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{3n-1}}{1 + \sqrt{5n+67}}$

טורי חזקות

VIII. קבע את תחומי ההתכנסות (בהחלט ועל תנאי) עבור הטורים הבאים:

1. $10x + 100x^2 + 1000x^3 + \dots$ 2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$
3. $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \frac{x^4}{3^4 \cdot 5} + \dots$ 4. $1 - \frac{x^2}{5\sqrt{2}} + \frac{x^4}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^6}{5^3\sqrt{4}} + \frac{x^8}{5^4\sqrt{5}} - \dots$
5. $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$ 6. $\frac{x-3}{1} - \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} - \frac{(x-3)^4}{4^2} + \dots$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n!$
9. $\ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \ln^4 x + \dots$ 10. $e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + 4e^{4x} + \dots$

פיתוח פונקציות לטור חזקות

IX. פתח את הפונקציה $f(x)$ לטור מקלורן וקבע את תחום ההתכנסות :

1. $f(x) = \ln(x+2)$ 2. $f(x) = e^{2x}$ 3. $f(x) = \frac{1}{x+3}$ 4. $f(x) = \sin 2x$
 5. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ 6. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ 7. $f(x) = e^{x+4}$ 8. $f(x) = x \ln(1+x)$

תשובות

- I. 1) 2/3 2) 3/2 3) 1 4) 1/2

| | II | III | IV | V | VI |
|-----------|-------|---------------------|-------|-----|-------------------|
| טור מתכנס | 1,3,5 | 3,6,10,12,14 | 1,3,4 | 1,2 | 1,7,9,11,13,14,15 |
| טור מתבדר | 2,4 | 1,2,4,5,7,8,9,11,13 | 2 | 3 | 2,3,4,5,6,8,10,12 |

VII.

| טור מתבדר | טור מתכנס בהחלט | טור מתכנס בתנאי |
|-----------|-----------------|-----------------|
| 6,10 | 2,4,5,8,9 | 1,3,7 |

VIII.

| | טור מתכנס בהחלט | טור מתכנס בתנאי | | טור מתכנס בהחלט | טור מתכנס בתנאי |
|---|----------------------------|-------------------|----|------------------------|-----------------|
| 1 | $-0.1 < x < 0.1$ | - | 6 | $2 \leq x \leq 4$ | - |
| 2 | $-1 < x < 1$ | $x = 1$ | 7 | $-\infty < x < \infty$ | - |
| 3 | $-3 < x < 3$ | $x = -3$ | 8 | $x = 0$ | - |
| 4 | $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ | $x = \pm\sqrt{5}$ | 9 | $\frac{1}{e} < x < e$ | - |
| 5 | $-5 < x < 3$ | $x = -5$ | 10 | $x < 0$ | - |

IX.

1) $\ln(x+2) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n \cdot n} + \dots$ ($-2 < x \leq 2$)

2) $e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots$ ($x \in \mathbf{R}$)

3) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{3^4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}} + \dots$ ($|x| < 3$)

4) $\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ ($x \in \mathbf{R}$)

5) $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3x^9}{2^3 \cdot 3!} - \dots$ ($|x| < 1$)

6) $f(x) = \cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$ ($0 \leq x < \infty$)

7) $f(x) = e^{x+4} = \sum_{n=0}^{\infty} e^4 \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbf{R}$)

8) $f(x) = x \ln(1+x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n-1}$ ($-1 < x \leq 1$)

פתרונות

$$\text{I. 1) } S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, a_1 = 1, q = -1/2, S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}$$

$$4) \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$$

$$\text{III. 4) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$$

$$\text{IV. 3) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$