

אלגברה של וקטורים

תרגילים :

1. במקבילית  $ABCD$   $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $\vec{AB} = \vec{a}$ . בטא באמצעות  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  את  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$ , כאשר  $M$  היא נקודת חיתוך האלכסונים.
2. הוקטורים  $\vec{a}$  &  $\vec{b}$  יוצרים זווית בת  $120^\circ$  ו-  $|\vec{a}|=3$ ,  $|\vec{b}|=4$ . חשב :
  - א.  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
  - ב.  $\vec{a} \cdot \vec{a}$
  - ג.  $(\vec{a} + \vec{b})^2$
  - ד.  $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$
3. הוכח את הזהות  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$  ותן לה פירוש גיאומטרי.
4. חשב את אורכי האלכסונים במקבילית הבנויה על הוקטורים  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , כאשר  $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .
5. הוכח כי אלכסוני המעוין ניצבים.
6. נתון  $|\vec{s}|=1$ ,  $|\vec{t}|=1$ ,  $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ ,  $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ ,  $\vec{q} \perp \vec{p}$ . חשב את הזווית בין הוקטורים  $\vec{s}$ ,  $\vec{t}$ .
7. חשב את  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  כאשר  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$ .
8. חשב את הזווית בין הוקטורים  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  כאשר  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ .
9. חשב את הזווית המשולש  $ABC$  כאשר  $\vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{BC} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . מצא את  $\vec{CA}$ .
10. חשב את ההיטל של הוקטור  $\vec{a} = 10\vec{i} + 2\vec{j}$  על הוקטור  $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ .
11. חשב את ההיטל של הוקטור  $\vec{b} = (1, -1, 4)$  על הוקטור  $\vec{a} = (1, 1, 2)$ .
12. חשב את האורך של התיכון  $AM$  והגובה  $AD$  במשולש  $ABC$  בעל הצלעות  $\vec{BC} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ .
13. חשב את הזווית המשולש  $ABC$  כאשר  $A(2, -1, 3)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 5)$ .
14. מצא נקודה  $D$  וזווית בין האלכסונים  $\vec{BD}$ ,  $\vec{AC}$  במקבילית  $ABCD$  כאשר  $A(-3, -2, 0)$ ,  $B(3, -3, 1)$ ,  $C(5, 0, 2)$ .
15. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  הוקטורים  $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$  קולינאריים?
16. הוכח כי הנקודות  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, -4)$ ,  $C(2, -1, -1)$ ,  $D(1, -1, 1)$  הן קודקודים של טרפז.
17. קודקודיו של משולש הם  $A(5, 0, 1)$ ,  $B(1, -5, 2)$ ,  $C(3, -1, 0)$ . מצא את שיעורי נקודת מפגש התיכונים (מרכז הכבד של המשולש).
18. מצא  $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$  כאשר  $|\vec{a}|=2$ ,  $|\vec{b}|=3$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
19. הוכח שהמרובע  $ABCD$  הוא ריבוע אם  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(5, 2)$ ,  $D(3, 3)$ .
20. נתון  $A(6, -4, 2)$ ,  $B(3, 2, 3)$ ,  $C(3, -5, -1)$ . הוכח כי משולש  $ABC$  הוא ישר זווית.
21. נתון  $A(2, 1, -4)$ ,  $B(1, 3, 5)$ ,  $C(7, 2, 3)$ ,  $D(8, 0, -6)$ . הוכח כי  $ABCD$  הוא מקבילית.
22. חשב  $|\vec{2a} - \vec{b}|$  אם  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .
23. חשב את קוסינוסי הכיוון של  $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .
24. וקטור  $\vec{a}$  יוצר זווית  $\beta = 60^\circ$  עם ציר ה- $y$ , זווית  $\gamma = 120^\circ$  עם ציר ה- $z$  וזווית  $\alpha$  עם ציר ה- $x$ . חשב  $\cos \alpha$ .
25. יהיו  $A(11, -5, 9)$ ,  $B(-8, -1, 1)$ . מצא וקטור יחידה שכיוונו מ- $A$  ל- $B$ .
26. יהי  $A(2, -1, 7)$ . מצא נקודה  $B$  כזאת ש- $AB = 34$  והוקטור  $\vec{AB}$  מקביל לוקטור  $8\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}$ .
27. חשב את  $\vec{a} \times \vec{b}$  כאשר  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .
28. חשב את שטח המשולש  $ABC$  כאשר  $A(3, 6, 4)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(2, 3, 5)$ .

29. חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ ,  $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .
30. חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים  $3\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} + 3\vec{b}$  כאשר  $|\vec{b}| = |\vec{a}| = 1$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ .
31. נתון  $|\vec{m}| = 4$ ,  $|\vec{n}| = 6$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ . מצא  $(3\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 6\vec{n})$ ,  $|(3\vec{m} - 2\vec{n}) \times (5\vec{m} - 6\vec{n})|$ .
32. נתון  $\vec{c} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1, 2)$ ,  $\vec{a} = (2, -3, 1)$ . חשב את  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  ואת  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ .
33. חשב את מכפלה מעורבת  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  כאשר  $\vec{c} = (1, 1, 4)$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .
34. הוכח כי הוקטורים  $\vec{c} = (1, 2, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{a} = (2, 5, 7)$  קופלנריים.
35. מצא נפח של פירמידה ABCD כאשר נקודות הן  $D(5, 5, 6)$ ,  $C(4, 5, 4)$ ,  $B(4, 3, 3)$ ,  $A(2, 2, 2)$ .
36. הוכח כי הנקודות  $D(2, 2, 2)$ ,  $C(2, 1, 2)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $A(1, 2, 1)$  נמצאות על מישור אחד.
37. הוכח: אם  $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ , אזי  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  קופלנריים.
38. הוכח שהוקטור  $\vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{a^2}$  מאונך לוקטור  $\vec{a}$ .

תשובות :

- 1)  $\vec{MD} = 0.5(\vec{b} - \vec{a})$ ,  $\vec{MC} = 0.5(\vec{a} + \vec{b})$ ,  $\vec{MB} = 0.5(\vec{a} - \vec{b})$ ,  $\vec{MA} = -0.5(\vec{a} + \vec{b})$
- 2) -6, 9, 13, 43      4)  $\sqrt{593}$       6)  $\frac{\pi}{3}$       7) 9      8)  $\frac{\pi}{4}$       9)  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ,  $\vec{CA} = (1, -3)$
- 10)  $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 2$       11)  $pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{8}{\sqrt{6}}$       12)  $|\vec{AM}| = 6$ ,  $\vec{BA}_{BC} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $|\vec{AD}| = \sqrt{28.8}$
- 13)  $\cos(\hat{A}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$ ,  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$       14)  $D(-1, 1, 1)$ ,  $120^\circ$
- 15)  $\alpha = -7.5$ ,  $\beta = -0.8$       17) (3, -2, 1)      18) 13      22) 2      23)  $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
- 24)  $45^\circ, 135^\circ$       25)  $\left(-\frac{19}{21}, \frac{4}{21}, \frac{-8}{21}\right)$       26)  $(-14, -19, 31), (18, 17, -17)$
- 27)  $(-7, 3, 1)$       28)  $\frac{\sqrt{426}}{2}$       29) 49      30) 4      31)  $336, 96\sqrt{3}$
- 32)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 7(-1, 2, -1)$ ,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (10, 13, 19)$
- 33)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 33$       35)  $V = \frac{7}{6}$