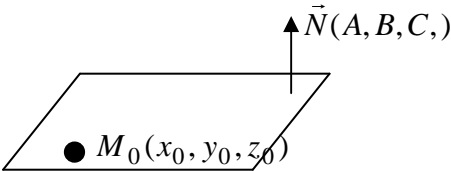


גיאומטריה אנליטית במרחב



I מישור

1. המשוואה הכללית של מישור :  $Ax + By + Cz + D = 0$

2. המשוואה של מישור שעובר דרך הנקודה  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

ומאונך לוקטור  $\vec{N}(A, B, C)$  :  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3. זווית בין מישורים (1), (2) אם  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  וקטורים מאונכים למישורים (1), (2) :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$

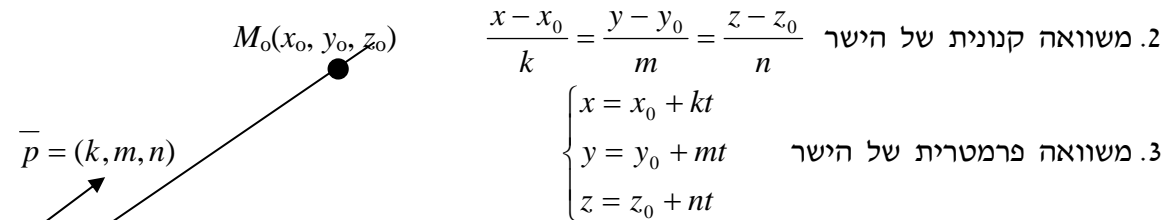
(א) אם  $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$  כלומר  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$  אזי מישורים מקבילים

(ב) אם  $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$  כלומר  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$  אזי מישורים מאונכים

4. מרחק מנקודה  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  למישור  $Ax + By + Cz + D = 0$  :  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

II ישר במרחב

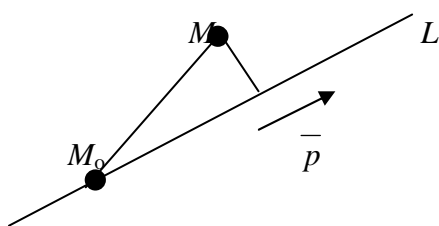
1. ישר כחיתוך של שני מישורים (משוואה כללית)  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$



2. משוואה קנונית של הישר  $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

3. משוואה פרמטרית של הישר  $\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

4. ישר העובר דרך שתי נקודות  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  :  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$



5. זווית בין הישרים  $\cos \alpha = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}$

6. מרחק מנקודה  $M$  לישר  $L$  :  $d = \frac{|M_0M \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}$

III מצב הדדי של ישר ומישור נתונים הישר  $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$  ,  $\vec{p} = (k, m, n)$

המישור  $Ax + By + Cz + D = 0$   $\vec{N} = (A, B, C)$

1. הישר מקביל למישור  $Ak + Bm + Cn = 0$  (כלומר  $\vec{N} \perp \vec{p}$ )

2. הישר מאונך למישור  $\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$  (כלומר  $\vec{N} \parallel \vec{p}$ )

3. זווית בין ישר למישור  $\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{p}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{p}|}$

**תרגילים :**

1. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה  $(3, -2, 5)$  ומאונך לוקטור  $(4, -3, 1)$ .
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות  $(1, 2, -1)$  ו-  $(-5, 2, 7)$  ומקביל ל-  
 א. ציר  $x$       ב. ציר  $y$       ג. הוקטור  $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
3. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות:  
 א.  $(4, 1, 1), (2, 3, 1), (1, 0, -1)$       ב.  $(0, 1, -5), (1, -2, 2), (2, 0, -1)$ .
4. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה  $(1, -1, 2)$  ומקביל למישור המשולש בעל הקודקודים  
 $C(3, 0, 1), B(-1, 2, 3), A(1, 0, 0)$ .
5. חשב את המרחק מהנקודה  $A(3, 9, 1)$  למישור  $x - 2y + 2z - 5 = 0$ .
6. על הציר  $x$  מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים  
 $2x + 2y - z = 1, 12x - 16y + 15z + 1 = 0$ .
7. מצא את משוואת המישור המקביל למישור  $3x + 6y - 2z = 7$  שמרחקו מהנקודה  $(1, -1, 2)$  שווה ל-3.
8. חשב נפח הפירמידה החסומה על ידי המישורים  $z = 0, y = 0, x = 0, 3x - 6y + 2z = 12$ .
9. מצא את קוסינוס הזווית החדה בין המישורים  $x + 2y + 2z + 1 = 0, 15x + 12y - 16z = 1$ .
10. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  המישורים  $2x + \alpha y + z = 1, 2x + y + z = 3$   
 א. מאונכים,      ב. מקבילים?
11. חשב את המרחק בין שני מישורים מקבילים:  $4x + 6y - 12z + 16 = 0, 2x + 3y - 6z + 5 = 0$ .
12. מצא את משוואת הישר העובר דרך  
 א. הנקודות  $(3, 5, 2), (2, 1, 3)$   
 ב. הנקודה  $(2, 1, 4)$  ומקביל לוקטור  $\vec{p} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$   
 ג. הנקודה  $(3, 1, -2)$  המאונכת למישור  $x + y - 2z = 2$ .
13. מצא את משוואת המישור העובר דרך שני הישרים המקבילים  
 $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}, \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-2}$ .
14. מצא זווית בין ישרים  $\left. \begin{matrix} 2x - y + 3z = 1 \\ 5x + 4y - z = 7 \end{matrix} \right\}^{-1} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{3}$ .
15. חשב את המרחק מנקודה  $(1, -1, 3)$  לישר  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ .
16. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(1, 1, 1)$  ומאונך לוקטורים:  
 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = (3, 1, 2)$
17. מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$  והמישור  $2x + 3y - z = 5$ .
18. מצא היטל של הנקודה  $A(2, -3, 4)$  על המישור  $x + 2y + 2z = 13$ .
19. כתוב את המשוואה הקנונית של הישר הנתון על ידי שני המישורים:  
 $x - y + 3z = 1, 3x + 2y - z - 3 = 0$
20. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $P(2, -3, 4)$  ביחס למישור  $3x + 4y + 5z + 36 = 0$ .
21. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $P(4, 3, 10)$  ביחס לישר  $x = 1 + 2t, y = 2 + 4t, z = 3 + 5t$ .
22. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(0, 1, -1)$  המקביל לקו החיתוך של המישורים:  
 $3x + y - 2z = 2, 2x - y + 3z + 7 = 0$
23. הוכח כי הישרים  $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = 6 - 4t$  ו-  $x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4$  נחתכים.  
 מצא את נקודת החיתוך.
24. יהי  $D$  המישור המוגדר ע"י המשוואה  $7x + 3y + 2z = 1$ . מצא את הנקודה  $Q$  במישור  $D$  הקרובה ביותר לנקודה  $P(1, 0, -1)$ ; הרכב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות  $P$  ו-  $Q$ ; וחשב המרחק  $PQ$ .

25. נתונות 4 נקודות במרחב :  $A(0,2,4); B(-2,6,-2); C(2,-4,8); D(10,2,0)$ . הרכב את משוואת הישר  $AK$  כאשר  $K$  זה היטלה של  $D$  על המישור  $ABC$ .

**גיאומטריה אנליטית במישור**

26. צייר את הגרפים של הקווים הבאים :

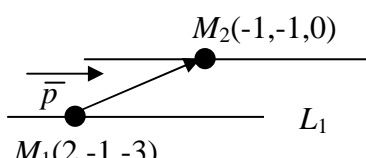
$a. x^2 + y^2 = 5$        $b. x^2 + y^2 = 4x$        $c. x^2 + y^2 = 6y$        $d. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$   
 $e. \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$        $f. 4x^2 - 9y^2 = 36$        $g. 4x^2 - 9y^2 = -36$        $h. y = 2(x-1)^2 - 3$   
 $i. x = -0.5(y+1)^2 + 4$        $j. 2y + x^2 - 4x = 6$

**תשובות :**

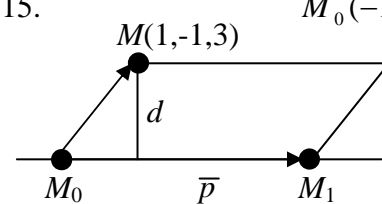
1)  $4x - 3y + z = 23$       2) א.  $y = 2$       ב.  $4x + 3z = 1$       ג.  $4x + 5y + 3z = 11$   
 3) א.  $x + y - 2z - 3 = 0$       ב.  $x - 2y - z - 3 = 0$   
 4)  $x + 4y - 2z + 7 = 0$       5) 6      6)  $(2,0,0), (11/43,0,0)$   
 7)  $3x + 6y - 2z = 14, 3x + 6y - 2z + 28 = 0$       8) 8      9)  $7/75$       10)  $\begin{cases} \text{א. } \alpha = -5 \\ \text{ב. } \alpha = 1 \end{cases}$   
 11)  $3/7$       12) א.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$       ב.  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 4 + 8t \end{cases}$       ג.  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$       13)  $3x - 2y + 3z + 1 = 0$   
 14)  $\cos \alpha = \frac{34}{\sqrt{8106}}$       15)  $\sqrt{\frac{69}{14}}$       16)  $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$       17)  $(-3,3,-2)$       18)  $(3,-1,6)$   
 19)  $x = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$       20)  $(-4,-11,-6)$       21)  $(2,9,6)$       22)  $x = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+1}{-5}$       23)  $(3,7,-6)$   
 24)  $Q\left(\frac{17}{31}, \frac{-6}{31}, \frac{-35}{31}\right), (PQ): \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, PQ = \frac{4}{\sqrt{62}} = \frac{2\sqrt{62}}{31}$       25)  $(AK): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

**פתרונות :**

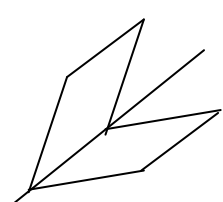
4.  $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,8,-4) \Rightarrow \bar{N} = (1,4,-2), 1(x-1) + 4(y+1) - 2(z-2) = 0$   
 11.  $d = \frac{|-8+0-0+5|}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$  לכן  $(-4,0,0)$  למשל,  $4x + 6y - 12z + 16 = 0$  מישור על ניקח נקודה

13.   $\vec{p} \times \overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (9, -6, 9) \Rightarrow N = (3, -2, 3)$   
 $3(x-2) - 2(y+1) + 3(z+3) = 0$

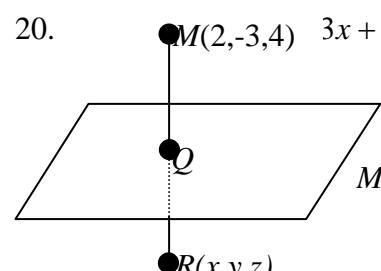
14.  $\vec{p}_{l_1} = (2, 1, 3), \vec{p}_{l_2} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-11, 17, 13), \cos \alpha = \frac{\vec{p}_{l_1} \cdot \vec{p}_{l_2}}{|\vec{p}_{l_1}| \cdot |\vec{p}_{l_2}|} = \frac{34}{\sqrt{8106}}$

15.   $M_0(-1, 2, 1), \overline{M_0 M_1} = \vec{p} = (2, -1, 3), \overline{M_0 M} = (2, -3, 2)$   
 $\overline{M_0 M} \times \vec{p} = (-7, -2, 4), d = \frac{|\overline{M_0 M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \sqrt{14}$

18.  $\begin{cases} (t+2) + 2(2t-3) + 2(2t+4) = 13 \\ t = 1 \\ x = 3, y = -1, z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 13 \\ x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{p} = (1, 2, 2) \quad (\text{א})$

19.   $\vec{p} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -10, -5)$  (א) הוקטור בכיוון הישר

(ב) נקודה על הישר אם  $x=0$ :  $\begin{cases} x = 0 \\ -y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (0, 2, 1)$ . לכן משוואת הישר היא  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

20.  (א) משוואת הישר MR המאונך למישור  $3x + 4y + 5z = -36$   
 $(MR) \quad x = 3t + 2, y = 4t - 3, z = 5t + 4$   
 (ב) נקי חיתוך הישר והמשור :  $Q(-1, -7, -1), t = -1$   
 (ג)  $MQ = RQ \Rightarrow \frac{x+2}{2} = -1, \frac{y-3}{2} = -7, \frac{z+4}{2} = -1 \Rightarrow R(-4, -11, -6)$