אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך המבחן 21.07.2014
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: <u>**חדו"א ג2**</u>
מס' הקורס: 201.1.9151
מועד ב'
משך המבחן- 3 שעות
חומר עזר: **2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים)**
אסור להשתמש במחשבון.

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).
כל שאלה שווה ל- 20 נקודות.
הציון יחושב על סמך 5 השאלות הטובות ביותר ואין צורך לציין איזה שאלות לבדוק.

כל התשובות תהיינה מנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1.

1א) (10 נק') הוכיחו כי ישר $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$ מקביל למישור $P:2x+y+z+5=0$

ומצאו מרחק בין הישר L ומישור P.

מצאו גם את הישר L_1, ההיטל של L על מישור P.

וקטור כיוון של L: $\bar{l}=(1,-1,-1)$

נורמל למישור: $\bar{N}=(2,1,1)$

$\bar{l}\cdot\bar{N}=2-1-1=0$

אז $\bar{N}$ מאונך ל-$\bar{l}$, ישר L, מקביל למישור P.

$\rho(L,P)=\rho(M_0,P)=$

כאשר $M_0(1,-1,0)\in L$.

$$=\frac{|2\cdot1-1\cdot1+1\cdot0+5|}{\sqrt{4+1+1}}=\sqrt{6}.$$

M_1 - היטל של M_0 על P:

$$\bar{r}_{M_1}=\bar{r}_{M_0}+\bar{N}t=\begin{cases}1+2t\\-1+t\\0+t\end{cases},\qquad M_1\in P$$

$$2(1+2t)+(-1+t)+t+5=0\Rightarrow t=-1$$

$$M_1(-1,-2,-1)$$

אז

$$L_1:\quad\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$$

1ב) (10 נק') האם הפונקציה הבאה

$$f(x,y)=\begin{cases}(3x^2+y^2)\ln(x^2+3y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה בנקודה $(0,0)$? הסבירו !

$$|f(x,y)| = (3x^2+y^2)|\ln(x^2+3y^2)| \leq$$

$$\leq (3x^2+9y^2)|\ln(x^2+3y^2)| = 3r|\ln r|$$

כאשר $r = x^2+3y^2$.

$$0 \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y)| \leq 3\lim_{r\to 0} r|\ln r|.$$

אז $\lim_{r\to 0} r\ln r = \lim_{r\to 0} \frac{\ln r}{\frac{1}{r}} \overset{Lop}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = 0$

$f(x,y) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} f(0,0)=0$ ופונקציה f רציפה ב-$(0,0)$.

שאלה מס' 2.

תהי פונקציה $f=f(v,w)$ בעלת נגזרות חלקיות עד לסדר שתיים לפחות והן רציפות.

חשבו $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ כאשר $u(x,y,z)=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$.

(צריך לבטא A דרך נגזרות של f ומשתנים x,y,z). $v=x+y+z,\quad w=x^2+y^2+z^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_v v'_x+f'_w w'_x=f'_v+2x f'_w$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_v\right)+2f'_w+\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_w\right)\cdot 2x=$$

$$=f''_{vv}v'_x+f''_{wv}w'_x+2f'_w+2x\left(f''_{wv}\cdot v'_x+f''_{ww}\cdot w'_x\right)=$$

$$=f''_{vv}+2xf''_{vw}+2f'_w+2xf''_{vw}+4x^2f''_{ww}=$$

$$=f''_{vv}+4xf''_{vw}+2f'_w+4x^2f''_{ww}$$

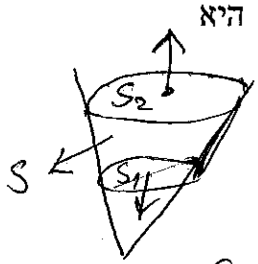
נגזרות אחרות מחשבים באופן דומה.

תשובה:

$$A=3f''_{vv}+4(x+y+z)f''_{vw}+6f'_w+4(x^2+y^2+z^2)f''_{ww}$$

שאלה מס' 3.

3א) (10 נק') מצאו שתף של שדה $\vec{F}=\{y-z,z-x,x-y-1\}$ דרך החלק החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ הנמצא בין $z=1$ לבין $z=2$. נתון כי אוריינטציה של החרוט היא החוצה.



$$\mathrm{div}\,\bar{F}=0$$

נשתמש במשפט גאוס:

$$\oiint\limits_{S\cup S_1\cup S_2} \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\bar{F}\,dV=0$$

אז

$$A=\iint\limits_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=-\iint\limits_{S_1}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS-\iint\limits_{S_2}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS$$

(1

$$S_1:\ \left\{\begin{matrix}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{matrix}\right\},\quad \bar{n}=(0,0,-1)$$

$$\iint\limits_{S_1}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 1\}}(1-x+y)\,dx\,dy$$

בגלל ש-x, y - פונקציות אי-זוגיות ותחום S_1 סימטרי,

$$\iint\limits_{S_1}x\,dx\,dy=\iint\limits_{S_1}y\,dx\,dy=0;\qquad \iint\limits_{S_1}1\,dx\,dy=\pi$$

(2

$$S_2:\ \left\{\begin{matrix}x^2+y^2\le 4\\ z=2\end{matrix}\right\},\quad n=(0,0,1)$$

$$\iint\limits_{S_2}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 4\}}(x-y-1)\,dx\,dy=-\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 4\}}1\,dx\,dy=-4\pi$$

תשובה:

$$A=-\pi+4\pi=\underline{\underline{3\pi}}$$

3ב) (10 נק') האם השדה הוקטורי הבא

$$\vec{F} = (2xz^3 + 6y)\vec{i} + (6x - 2yz)\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$$

הוא שדה משמר? אם כן, מצאו פוטנציאל של השדה.

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-2y+2y) - \bar{j}(6xz^2 - 6xz^2) + \bar{k}(6-6) = \bar{0}$$

לכן השדה משמר.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz^3 + 6y \Rightarrow f = x^2z^3 + 6yx + g(y,z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 2yz \Rightarrow 6x + g'_y(y,z) = 6x - 2yz$$

$$g'_y = -2yz, \quad g = -y^2z + h(z)$$

$$f = x^2z^3 + 6yx - y^2z + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2 \Rightarrow 3x^2z^2 - y^2 + h'(z) = 3x^2z^2 - y^2$$

$$h'(z) = 0 \qquad h(z) = 0$$

תשובה:

$$f = \underline{x^2z^3 + 6yx - y^2z}$$

שאלה מס' 4. מצאו את הערך המקסימאלי והערך המינימאלי של פונקציה

$f(x,y)=x^2-y^2-4y$ בתחום $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 16\}$.

1) נקודות חשודות לקיצון בתחום $x^2+y^2<16$:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2y-4=0\end{cases} \Longrightarrow M_1(0,-2)$$ נק' חשודה יחידה

$f(M_1)=0$

2) נקודות על השפה: $g=x^2+y^2-16=0$

שיטת כופלי לגרנג':

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\\ g=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2x+2\lambda x=0\\ -2y-4+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=16\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x(1+\lambda)=0\\ y(1-\lambda)=-2\\ x^2+y^2=16\end{cases}$$

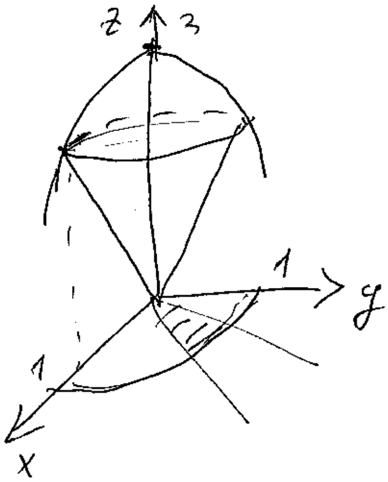
מקבלים:

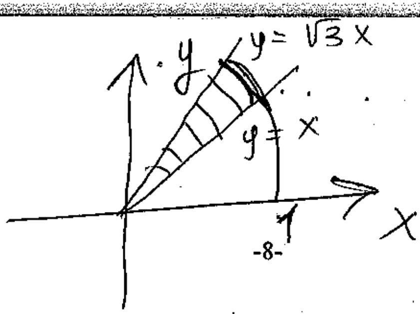
$$\begin{cases}x=0 \Longrightarrow y=\pm 4\\ M_2(0,4),\quad M_3(0,-4)\end{cases} \text{ או } \begin{cases}x\neq 0 \Longrightarrow \lambda=-1\\ y=-1,\quad x=\pm\sqrt{15}\\ M_4(\sqrt{15},-1),\quad M_5(-\sqrt{15},-1)\end{cases}$$

$f(M_2)=-32\quad f(M_3)=0\quad f(M_4)=f(M_5)=18$

תשובה: ערך מקסימלי: $f(M_4)=f(M_5)=18$

ערך מינימלי: $f(M_2)=-32$





שאלה מס' 5. צפיפות הגוף

$$D=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;\begin{matrix}2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3-x^2-y^2\\ x\le y\le x\sqrt{3}\end{matrix}\right\}$$

היא $\rho = z$. מצאו מסה של הגוף.

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad 2r = 3 - r^2 \Rightarrow r_{1;2} = \begin{matrix}1\\-3\end{matrix}$

$$0 \le r \le 1$$

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

$$m = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{2r}^{3-r^2} z\,dz = \frac{\pi}{12}\int_0^1 r\,\frac{(3-r^2)^2-4r^2}{2}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{24}\int_0^1 (9r-10r^3+r^5)\,dr = \frac{13}{144}\pi$$

שאלה מס' 6. חקרו התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2-3}x^n$

$a_n = \frac{\ln n}{n^2-3}$ $\qquad$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\frac{n^2-3}{(n+1)^2-3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

אז $R=1$. עבור $-1<x<1$ טור מתכנס.

התכנסות בקצוות הקטע:

$x=1$): טורים $\sum_{1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$, $\sum\frac{\ln n}{n^2-3}$

מתכנסים או מתבדרים יחד. נשתמש במבחן אינטגרל כדי לבדוק התכנסות של $\sum\frac{\ln n}{n^2}$!

$f=\frac{\ln x}{x^2}\geq 0 \quad (x\geq 1)$. $\qquad f'=\frac{x-2x\ln x}{x^4}<0 \quad (x\geq 3)$

אז f מונוטונית יורדת ושואפת לאפס.

$$\int_1^N\frac{\ln x}{x^2}dx = -\int_1^N \ln x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^N + \int_1^N\frac{dx}{x^2} =$$

$$= -\frac{\ln N}{N} - \frac{1}{N} + 1 \xrightarrow[N\to\infty]{} 1 < \infty$$

אז טור מתכנס בנקודה $x=1$.

$x=-1$): עבור $x=-1$ מקבלים טור מתחלף $\sum\frac{\ln n}{n^2-3}(-1)^n$.

הוא מתכנס בהחלט (בדקנו עבור $x=+1$)

תשובה: טור מתכנס עבור $-1\leq x\leq 1$