אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 02.05.2014
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
בוחן ב: **חדו"א ג2**
מס' הקורס: 201.1.9151
משך הבוחן- 2 שעות
חומר עזר: **דף נוסחאות A4 אחד (משני צדדים)**
אסור להשתמש במחשבון.

יש לענות על כל 4 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות) ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

בהצלחה !

שאלה מס' 1. ישר L עובר דרך נקודה $M_0(-1,2,-3)$ ומקביל לכל אחד מהמישורים הבאים: $P_1: x-3y+z-8=0$ ו- $P_2: 2x+y-z-7=0$.

א) (13 נק') מצאו מרחק בין ישר L ונקודה $M_1(0,1,-2)$.

ב) (12 נק') מה מצב הדדי בין ישר L וישר $L_1: \begin{cases} 2x+y+z-4=0 \\ x-y-2z+1=0 \end{cases}$ (מצטלבים, נחתכים, מקבילים או מתלכדים)? הסבירו.

נורמלים ל- P_1, P_2: $\bar{N}_1 = (1,-3,1)$ $\quad \bar{N}_2 = (2,1,-1)$

וקטור כיוון של הישר: $\bar{l} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$

משוואת הישר: $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{l}$, $\quad \bar{r}_0 = (-1,2,-3)$

א) מרחק:

$$d = \frac{|\overline{M_0M_1} \times \bar{l}|}{|\bar{l}|}$$

$\overline{M_0M_1} = (1,-1,1)$

$\overline{M_0M_1} \times \bar{l} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -10\bar{i} - 5\bar{j} + 5\bar{k}$

$$d = \frac{\sqrt{100+25+25}}{\sqrt{4+9+49}} = 5\sqrt{\frac{3}{31}}$$

ב) וקטור כיוון של L_1: $\bar{l}^* = \bar{N}_1^* \times \bar{N}_2^* = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 5\bar{j} - 3\bar{k}$

$\bar{N}_1^* = (2,1,1)$, $\quad \bar{N}_2^* = (1,-1,-2)$

נקודה על הישר L_1: $z=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow M^*(1,2,0)$

הישרים לא מקבילים כי $\bar{l}, \bar{l}^*$ אינם קולינאריים; והם לא מתלכדים.

$\overline{M_0M^*} \cdot \bar{l} \times \bar{l}^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Rightarrow$ לא נחתכים

תשובה: הישרים מצטלבים

שאלה מס' 2.

2א (12 נק') פונקציה $f(x,y,w,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}$ מוגדרת בתחום $0<x,y,z,w$.

הוכיחו כי $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+w\frac{\partial f}{\partial w}$ שווה לקבוע (ומצאו את הקבוע הזה).

$f'_x=\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}\cdot\frac{z}{wx}$ $\quad f'_y=-\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}\left(\frac{z}{wy}\right)$

$f'_w=\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}\left(-\frac{z}{w^2}\right)(\ln x-\ln y)$

$f'_z=\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}\frac{1}{w}(\ln x-\ln y)$

$xf'_x+yf'_y+zf'_z+wf'_w=0$

2ב (13 נק') הסבירו מדוע משוואה

$$F = \left(\frac{x}{y}\right)^{z/w} - 2x + 1 = 0$$

מגדירה בסביבת הנקודה $(y,w,z)=(1,1,1)$ פונקציה סתומה $x=g(y,w,z)$ המקיימת $g(1,1,1)=1$. השתמשו בקירוב ליניארי כדי להעריך $g(1.01,1.02,1.03)$.

בסביבת נק' $(1,1,1,1)$ פונקציה F רציפה ובעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות. נק' $(1,1,1,1)$ מקיימת את המשוואה $F=0$.

$$F'_x(1,1,1,1) = f'_x\Big|_{(1,1,1,1)} - 2 = -1 \neq 0$$

אז קיימת בסביבת הנקודה $(1,1,1)$ פ-סתומה $x=g(y,w,z)$ ומקבלת ערך 1: $g(1,1,1)=1$.

$$F'_y(\underbrace{1,1,1,1}_{M}) = f'_y(M) = -1 \qquad g'_y(\underbrace{1,1,1}_{P}) = -\frac{F'_y(M)}{F'_x(M)} = -1$$

$$F'_w(M) = f'_w(M) = 0 \qquad g'_z(P) = -\frac{F'_z(M)}{F'_x(M)} = 0$$

$$F'_z(M) = f'_z(M) = 0 \qquad g'_w(P) = -\frac{F'_w(M)}{F'_x(M)} = 0$$

$$g(1.01, 1.02, 1.03) \approx \underset{1}{g(P)} + g'_y(P)\cdot 0.01 + g'_z(P)\cdot 0.02 + g'_w(P)\cdot 0.03 =$$

$$= 1 - 0.01 = \underline{\underline{0.99}}$$

שאלה מס' 3.

3א (12 נק') הסבירו מדוע אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אז f גם רציפה בנקודה זו. תנו דוגמה של פונקציה רציפה ובעלת נגזרות חלקיות בנקודה אך לא דיפרנציאבילית בנקודה זו (הסבירו את הדוגמה).

(1) אם f דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0) אז

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

כאשר

$$\alpha,\beta \xrightarrow[\Delta x,\Delta y\to 0]{} 0$$

אז

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

ופונקציה f רציפה ב-(x_0,y_0).

(2) פונקציה $f=\sqrt{|xy|}$ רציפה ב-$(0,0)$ ובעלת נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

אך f לא דיפרנציאבילית: אם כן,

$$\Delta f = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = 0\Delta x + 0\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

ניקח $\Delta x=\Delta y$ ונקבל

$$\sqrt{|\Delta x|^2} = |\Delta x| = (\alpha+\beta)\Delta x$$

אז

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \alpha+\beta$$

ולא יכול להיות ש-

$$\alpha,\beta \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0.$$

3ב) (13 נק') האם פונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+\tan\left(y^2\right)-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
רציפה ב- $(0,0)$?

1) $x=y$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{tg\, x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2) $y=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} x=0$$

אז לא קי"ם

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y).$$

ופונקצ' ה f אינה
רציפה ב-$(0,0)$

שאלה מס' 4. מצאו פולינום של טיילור ממעלה 2 לפונקציה

$$f(x,y)=e^{y\sin x}$$

בסביבת נקודה $(x_0,y_0)=(0,1)$ והשתמשו בו כדי להעריך $f(0.1,1.05)$.

$$f'_x = e^{y\sin x}\cdot y\cos x \qquad f'_x(0,1)=1$$

$$f'_y = e^{y\sin x}\sin x \qquad f'_y(0,1)=0$$

$$f''_{xx} = e^{y\sin x}\left((y\cos x)^2 - y\sin x\right) \qquad f''_{xx}(0,1)=1$$

$$f''_{yy} = e^{y\sin x}\cdot\sin^2 x \qquad f''_{yy}(0,1)=0$$

$$f''_{xy} = e^{y\sin x}\left(y\cos x\sin x+\cos x\right) \qquad f''_{xy}(0,1)=1$$

$$f(0.1,1.05)\approx f(0,1)+f'_x(0,1)\cdot 0.1+f'_y(0,1)\cdot 0.05+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(f''_{xx}(0,1)\cdot 0.1^2+2f''_{xy}(0,1)\cdot 0.1\cdot 0.05+$$

$$+f''_{yy}(0,1)\cdot 0.05^2\Big)=$$

$$=1+1\cdot 0.1+0\cdot 0.05+\frac{1}{2}\left(1\cdot 0.01+2\cdot 0.005+0\cdot 0.05\right)=$$

$$=1.11$$