מדור בחינות

תאריך הבחינה: 18.07.2011
מרצים: פרופ' ל. פריגוזין, דר' ט. זלצמן,
דר' ס. גבריאליאן
מבחן ב: חדו"א ג'2
מס הקורס: 201.1.9151
שנה: א' סמסטר: ב' מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות (4 עמ'),
מחשב כיס עם צג קטן

מסי נבחן: ________________

יש לענות רק על 5 שאלות מתוך 6 ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).

כל שאלה שווה 20 נקודות.

כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

סופי	6	5	4	3	2	1

בהצלחה !

שאלה 1.

1א) (10 נק') האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ **מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר?**

$$S=\sum(-1)^{n+1}a_n\ ,\qquad a_n=\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$$

$$a_n=\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+O(n^{-4})\right)}=\sqrt{\frac{1}{2n^2}+O(n^{-4})}=$$

$$=\frac{1}{n\sqrt{2}}\sqrt{1+O(n^{-2})}.$$

נסמן $b_n=\frac{1}{n}$. טור $\sum b_n$ מתבדר.

$$\frac{a_n}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow\sum_{1}^{\infty}a_n$$ גם טור מתבדר.

כלומר, $\sum(-1)^n a_n$ לא מתכנס בהחלט. נבדוק התכנסות בתנאי. בגלל ש-

$$a_n\xrightarrow[n\to 0]{}0$$

וסדרה a_n מונוטונית יורדת הטור מתכנס (מבחן לייבניץ).

תשובה: הטור מתכנס בתנאי

1ב) (10 נק') מצא פיתוח של פונקציה $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$ לטור מקלורן. מהו תחום ההתכנסות של הטור?

פתרון: נציג

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3} \;=$$

$$x=A(x+3)+B(x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow -1=2A \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$x=-3 \Rightarrow -3=-2B \Rightarrow B=\frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n \;=$$

$$-1<x<1 \qquad\qquad -1<\frac{x}{3}<1$$

$$-3<x<3$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)\cdot x^n=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}\cdot x^n \quad , \quad x\in(-1,1)}}$$

שאלה 2.

2א) (10 נק') יהיו פונקציות $f(v), g(v)$ גזירות פעמיים ברציפות.

נגדיר $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$. **חשב** $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

פתרון: נחשב כל הנגזרות:

$$u'_x = f(x+y) + x \cdot f'(x+y) + yg'(x+y)$$

$$u'_y = x \cdot f'(x+y) + g(x+y) + y \cdot g'(x+y)$$

$$u''_{xx} = f' + f' + x \cdot f'' + y \cdot g'' = xf'' + yg'' + 2f'$$

$$u''_{xy} = f' + xf'' + g' + y \cdot g'' = xf'' + yg'' + f' + g'$$

$$u''_{yy} = x \cdot f'' + g' + g' + y \cdot g'' = xf'' + yg'' + 2g'$$

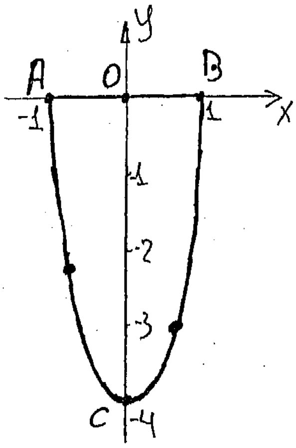
לכן

$$A = \cancel{xf''} + \cancel{yg''} + \cancel{2f'} - \cancel{2xf''} - \cancel{2yg''} - \cancel{2f'} - \cancel{2g'} + \cancel{xf''} + \cancel{yg''} + \cancel{2g'} = 0$$

תשובה: $A = 0$.

2ב) (10 נק') מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של פונקציה $z(x,y)=x^2+xy-2$ בתחום $4x^2-4\le y\le 0$.

פתרון: (1) נמצא את הנקודות הקריטיות הנמצאות ב-D:



$$\begin{cases} z'_x=2x+y=0 \\ z'_y=x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z(0,0)=-2$$

(2) נחקור את z על הקטע $AB: \begin{matrix} x\in[-1,1] \\ y=0 \end{matrix}$. כאן

$$z=x^2-2$$

$$z'=2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow z(0)=-2 \qquad z(A)=z(-1,0)=-1$$

$$z(B)=z(1,0)=-1$$

(3) נחקור את z על המסלול ACB של הפרבולה $\begin{matrix} x\in[-1,1] \\ y=4x^2-4 \end{matrix}$. כאן

$$z=x^2+4x^3-4x-2=4x^3+x^2-4x-2$$

$$z'=12x^2+2x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16\cdot12}}{24}=\frac{-2\pm14}{24} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{2}{3} \\ y_1=4\cdot\frac{4}{9}-4=-\frac{20}{9} \end{cases} \begin{cases} x_2=\frac{1}{2} \\ y_2=4\cdot\frac{1}{4}-4=-3 \end{cases}$$

$$z\left(-\frac{2}{3},-\frac{20}{9}\right)=4\cdot\left(-\frac{8}{27}\right)+\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-2=\frac{-32+12+72-54}{27}=-\frac{2}{27}$$

$$z\left(\cancel{-}\frac{1}{2},-3\right)=4\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{2+1-16}{4}=-\frac{13}{4}$$

מסקנה:

$$z_{min}=z\left(\frac{1}{2},-3\right)=-\frac{13}{4}$$

$$z_{max}=z\left(-\frac{2}{3},-\frac{20}{9}\right)=-\frac{2}{27}$$

שאלה 3.

3א) (10 נק') הוכח כי שדה ווקטורי $\vec{F} = (x-y+z)\vec{i} + (y+z-x)\vec{j} + (x+y-2z)\vec{k}$ **הוא שדה משמר ומצא פונקצית פוטנציאל שלו. מהי עבודה של שדה** $\vec{F}$ **לאורך מסלול כלשהו מ-** $(0,0,0)$ **ל-** $(1,1,1)$ **?**

פתרון: השדה מוגדר בכל ה-$\mathbb{R}^3$. לכן כדי לבדוק ש-$\vec{F}$ שדה משמר מספיק לבדוק כי $rot\vec{F}=\vec{0}$.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y+z & y+z-x & x+y-2z \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(-1-(-1)) = 0$$

לפיכך $\vec{F}$ שדה משמר

נמצא את הפוטנציאל שלו:

$$\begin{cases} u'_x = x-y+z \\ u'_y = y+z-x \\ u'_z = x+y-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,y,z) = \int (x-y+z)dx + h(y,z) = \frac{x^2}{2} - yx + zx + h(y,z)$$

$$u'_y = -x + h'_y = y+z-x \Rightarrow h'_y = y+z \Rightarrow$$

$$h(y,z) = \int (y+z)dy + g(z) = \frac{y^2}{2} + zy + g(z)$$

לכן

$$u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - yx + zx + zy + g(z)$$

$$u'_z = x+y+g'(z) = x+y-2z \Rightarrow g'(z) = -2z \Rightarrow g(z) = -z^2 + C$$

סופית

$$\underline{u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2 - yx + zx + zy + C}$$

כעת נחשב את העבודה:

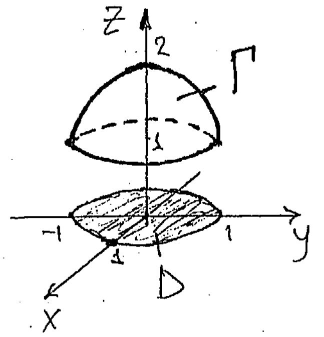
$$W = u(1,1,1) - u(0,0,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{1} = 1.$$

תשובה:

$$u = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2 - yx + zx + zy + C$$

$$W = 1$$

3ב) מצא את השטח של החלק של פרבולויד $z=2-x^2-y^2$ הנמצא בתוך חרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



פתרון: נמצא את החיתוך של הפרבולויד והחרוט:

$$\begin{cases} z=2-x^2-y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-z^2 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad (\text{כי } z\geq 0)$$

נחשב:

$$\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

היטל של המשטח Γ על המישור xy הוא העיגול: $D: \varphi\in[0,2\pi]$

$r_1(\varphi)=0$

$r_2(\varphi)=1$

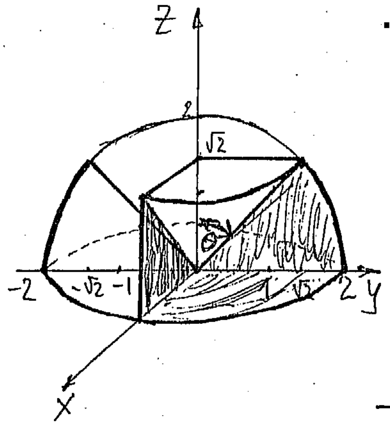
לכן

$$S(\Gamma)=\iint_\Gamma ds=\iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,d\tfrac{1}{8}(1+4r^2)=2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3/2}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

תשובה: $S(\Gamma)=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

<u>שאלה 4</u>. חשב מסה של גוף בעל צפיפות $d = xyz$ **וחסום על-ידי משטחים** $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z^2 \le x^2 + y^2,\ z^2 \le 4 - x^2 - y^2$.



<u>פתרון:</u> נמצא את החיתוך של הספירה והחרוט:

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z^2 = 4-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ z^2 = 4-z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\sqrt{2} \quad (\text{כי } z\ge 0) \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

נרשום את הגוף בקואורדינטות כדוריות:

$\Omega:\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (כי $x\ge0$ ו $y\ge0$)

$\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (כי במעגל $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=\sqrt{2}\end{cases}$ נקבל $\underset{x=0}{y=z}$ ולכן $\theta=\frac{\pi}{4}$)

$r \in [0, 2]$ (כי r גדול ביותר על הספירה $x^2+y^2+z^2=4$)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

מכאן

$$m = \iiint_\Omega d\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\sin\varphi\sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos\theta\, d\theta \int_0^2 r^5\, dr = \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4}\sin^4\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{48}(1-0)\cdot\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right)\cdot(64-0) = \frac{1}{48}\cdot\frac{3}{4}\cdot 64 = \underline{\underline{1}}\ .$$

<u>תשובה:</u> $m=1$. ■

<u>שאלה 5</u>. הישר מוגדר כקו חיתוך של שני מישורים:

$$\begin{cases} 3x+2y+5z+6=0 \\ x+4y+3z+4=0 \end{cases}$$

מצא משוואת המישור המקביל לישר זה וכולל בתוכו את הישר הבא:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

מצא גם מרחק מהישר הראשון למישור זה.

<u>פתרון:</u> נמצא את הכיוון של ישר החיתוך: לכן $\vec{u}_1=(3,2,5)$, $\vec{u}_2=(1,4,3)$

$$\vec{l}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-14\vec{i}-4\vec{j}+10\vec{k}$$

לפי התנאי המישור עובר דרך הנקודה $(1,5,-1)$ ומקביל לווקטור $(3,2,-3)$.

לכן משוואת המישור היא

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -14 & -4 & 10 \end{vmatrix}=8(x-1)+12(y-5)+16(z+1) \Leftrightarrow 2(x-1)+3(y-5)+4(z+1)=0$$

או

$$\underline{2x+3y+4z-13=0}.$$

מכיוון שהישר מקביל למישור, המרחק שווה למרחק מנקודה כלשהי הנמצאת על הישר למישור זה.

תחילה נמצא נקודה על הישר. היא מקיימת את המערכת. נשים כי $z=0$ ונקבל

$$\begin{cases} 3x+2y+6=0 \\ x+4y+4=0 \end{cases}_{\cdot(-2)} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+6=0 \\ -5x-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{5} \\ y=-3-\frac{3}{2}x=-3+\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{5}=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

לכן $M(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5},0)$. מכאן המרחק הוא:

$$d=\frac{|2\cdot(-\frac{8}{5})+3\cdot(-\frac{3}{5})+4\cdot 0-13|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{18}{\sqrt{29}}$$

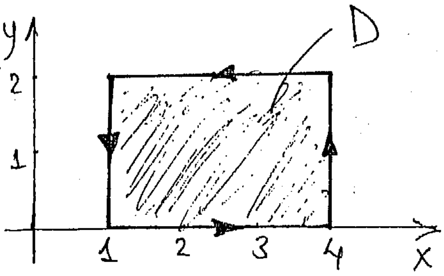
<u>תשובה:</u> משוואת המישור: $2x+3y+4z-13=0$

המרחק: $d=\frac{18}{\sqrt{29}}$.

שאלה 6. חשב את האינטגרל הקווי הבא

$$\oint_L \sqrt{x^2+4y^2}\,dx + y\left(xy+4\ln\left\{x+\sqrt{x^2+4y^2}\right\}\right)dy$$

כאשר מסלול L **הוא שפה של מלבן** $\{(x,y)\,|\,1\le x\le 4,\, 0\le y\le 2\}$ **(נגד כיוון השעון).**



פתרון: נחשב את האינטגרל תוך שימוש במשפט גרין:

$$P=\sqrt{x^2+4y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$Q=y\left(xy+4\ln\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)\right)=xy^2+4y\ln\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+4y\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4y^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}\right)=y^2+4y\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

לכן

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2$$

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_1^4 dx\int_0^2 y^2dy=3\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=8.$$

תשובה: 8.