מועד ב

תאריך המבחן 29.06.2014
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א ג2**
מס' הקורס: 201.1.9151
משך המבחן- 3 שעות
חומר עזר: **2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים)**
אסור להשתמש במחשבון.

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה).
כל שאלה שווה ל- 20 נקודות.
הציון יחושב על סמך 5 השאלות הטובות ביותר ואין צורך לציין איזה שאלות לבדוק.

כל התשובות תהיינה מנומקות היטב.

בהצלחה !

שאלה מס' 1. נתונים ישר $L: \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ ונקודה $A(1,-1,2)$.

<u>מצאו:</u>

א1) (5 נק') משוואה קנונית של הישר.
ב1) (5 נק') מרחק מנקודה A לישר L.
ג1) (5 נק') מישור P העובר דרך נקודה A ומאונך לישר L.
ד1) (5 נק') נקודה B הסימטרית ל- A לגבי ישר L.

א)

וקטור כיוון:

$$\bar{\ell} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - 3\bar{j} + 3k$$

אפשר לבחור

$$\bar{\ell} = (1,1,-1)$$

נקודה:

$$x=0 \Rightarrow y=z,\ y+2z=3 \Rightarrow M_0(0,1,1)$$

משוואה קנונית:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

ב)

$$\overline{AM_0} = (0,1,1)-(1,-1,2) = (-1,2,-1)$$

$$\bar{\ell} \times \overline{AM_0} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3k$$

$$d = \frac{|\bar{\ell} \times \overline{AM_0}|}{|\bar{\ell}|} = \frac{\sqrt{1+4+9}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

ג)

$$P: \quad \bar{N} = \bar{\ell} \qquad 1(x-1)+1(y+1)-1(z-2)=0$$

$$x+y-z+2=0$$

ד) נק' החיתוך של L ו- P:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} = t$$

$$x=t,\ y=t+1,\ z=1-t \Rightarrow \quad t+t+1-(1-t)+2=0$$

$$3t=-2 \quad t=-\frac{2}{3}$$

$$C: \quad x=-\frac{2}{3} \quad y=\frac{1}{3},\quad z=\frac{5}{3} \qquad \overline{AC} = \left(-\frac{5}{3}, +\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + 2\overline{AC} = (1,-1,2) + \left(-\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

שאלה מס' 2.

2א) (13 נק') <u>השתמשו בשיטת כופלי לגרנג'</u> כדי למצוא ערך מקסימאלי וערך מינימאלי של פונקציה

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

על רבע מעגל $\{x^2+y^2=1, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0\}$.

אלגו': $g=x^2+y^2-1=0$. שיטת כופלי לגרנג':

$$\begin{cases} f_x+\lambda g_x=0 \\ f_y+\lambda g_y=0 \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+2\lambda x=0 \\ -x+2y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

אם $x=0$ אז $y=0$ ו- $g(0,0)\neq 0$, אז אפשר מקבלת $x=0$.

כאשר $x\neq 0, y\neq 0$

$$\lambda=\frac{y-2x}{2x}=\frac{x-2y}{2y} \Rightarrow 2y^2-\cancel{4xy}=2x^2-\cancel{4xy}$$

$$x^2=y^2=\frac{1}{2}$$

אז $y=\frac{1}{\sqrt2}$, $x=\frac{1}{\sqrt2}$ כי $x,y\geq 0$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2}$$

תנאי $\begin{cases} 0=\nabla g=(2x,2y) \\ 0=g=x^2+y^2-1 \end{cases}$ לא נותנת פתרון נוסף.

צריך לבדוק קצוות העקום: נקודות $(1,0)$, $(0,1)$.

$$f(0,1)=f(1,0)=1$$

רק נקודות $(1,0),(0,1),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ חשודות לקיצון.
f פ. רציפה ומקבלת ערך max וערך min שלה על העקום. אז

נק' min: $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

נק' max: $(0,1),(1,0)$.

2ב) (7 נק') מצאו נקודות קיצון של פונקציה $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x$.

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+y-3=0 \\ f'_y &= x+2y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -2y \\ -4y+y-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$y=-1$$
$$x=2$$

נקודה חשודה: $(2,-1)$

$$f''_{xx}=2>0 \qquad f''_{xy}=1 \qquad f''_{yy}=2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3>0$$

תשובה: לפונקציה f יש נקודת קיצון יחידה $(2,-1)$
וזאת נק' min.

שאלה מס' 3. בתחום $(x,y)\neq(0,0)$ מוגדר שדה וקטורי

$$\bar F=\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)\bar i-\left(\frac{x}{x^2+y^2}+2y\right)\bar j$$

האם השדה הוא שדה פוטנציאלי (משמר) ?

הסבירו וחישבו עבודה של השדה, $A=\int_L \bar F\cdot d\bar l$, כאשר L הוא מסלול מעגלי (נגד כיוון השעון):

א) $L:\ x^2+y^2=1$ **ב)** $L:\ (x-2)^2+(y-3)^2=1$

$$\bar F=M\bar i+N\bar j$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Longrightarrow$$

שדה $\bar F$ משמר בכל תחום פשוט קשר שאינו כולל נק' $(0,0)$.

בנק' $(0,0)$ $\bar F$, $\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial x}$ לא מוגדרים.

א) בגלל ש-$(0,0)$ נקודה מתוך $x^2+y^2\le 1$, אי אפשר להשתמש בנוסחת גרין. נשתמש בפרמטריזציה של המסלול $\{\underline{x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi}\}$ ונחשב את האינטגרל

$$A=\oint_L \bar F\cdot d\bar l=\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\sin t}{\cos^2t+\sin^2t}+\cos t\right](-\sin t)-\left[\frac{\cos t}{\cos^2t+\sin^2t}+2\sin t\right]\cos t\right\}dt=$$

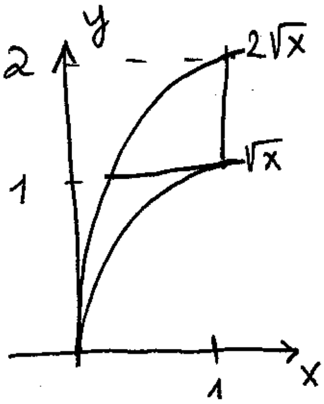
$$=-\int_0^{2\pi}(\sin^2t+\cos^2t+3\sin t\cos t)\,dt=-2\pi$$

ב) בתחום $(x-2)^2+(y-3)^2\le 1$ שדה $\bar F$ משמר.

אז אינטגרל במסלול סגור L שווה לאפס.

שאלה מס' 4.

4א) (8 נק') החליפו סדר אינטגרציה:

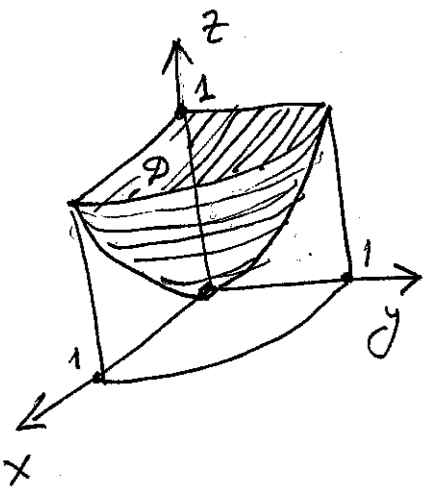


$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$$

$$y = \sqrt{x} \longrightarrow x = y^2$$

$$y = 2\sqrt{x} \longrightarrow x = \frac{y^2}{4}$$

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} f(x,y)\,dx$$



4ב) (12 נק') חישבו את האינטגרל הבא

$$I=\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$$

כאשר $D=\left\{(x,y,z):\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le z\le 1\right\}$.

נשתמש בקואורדינטות גליליות (φ, r, z):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 \Big\{ \underbrace{r\cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{r\sin\varphi}_{y} \cdot z \cdot \underbrace{r}_{\text{יעקוביאן}} \Big\} dz =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2} \cdot \int_0^1 dr \left(r^3 \frac{z^2}{2}\Big|_{z=r^2}^{1} \right) =$$

$$= -\frac{\cos 2\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^1 \frac{r^3(1-r^4)}{2} dr =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{8}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}$$

שאלה מס' 5.

א5) (10 נק') נניח כי משוואה $f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ מגדירה פונקציה סתומה $z=g(x,y)$.

הוכיחו שפונקציה $g(x,y)$ מקיימת משוואה $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=z$ (נתון גם כי כל הנגזרות הנדרשות קיימות).

$$f=f(u,v)\ ;\quad u=\frac{x}{z}\ ;\quad v=\frac{y}{z}\ .$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\ ,\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)$$

$$x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{x\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial v}}{-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{y}{z^2}-\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{x}{z^2}}=z$$

5ב) (10 נק') מצאו תחום ההתכנסות של טור

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)}(x-2)^n$$

$$t=x-2 \quad\Rightarrow\quad S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n t^n, \quad a_n=\frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1/3}(n+1000)\,3^n}{n^{1/3}(n+1001)\,3^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

אז רדיוס ההתכנסות של הטור

$$\underline{R=3}$$

נבדוק התכנסות הטור בקצוות של $t\in(-R,R)$

1) $t=3$: $S=\sum_{1}^{\infty}\frac{n^{1/3}}{n+1000}$

טור מתבדר (השוואה עם טור $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha=\frac{2}{3}$)

2) $t=-3$: טור מתחלף $S=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{1/3}}{n+1000}$ לא מתכנס בהחלט.

נבדוק תנאי משפט לייבניץ:

a) $u_n=\frac{n^{1/3}}{n+1000}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

b) כדי לבדוק מונוטוניות נחשב נגזרת:

$$f(n)=n^{2/3}+\frac{10^3}{n^{1/3}} \Rightarrow u_n=\frac{1}{f(n)}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{10^3}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$f'(x)>0$ כאשר x מספיק גדול. אז $f(x)$ מונוטונית עולה ו- $\{u_n=1/f(n)\}$ סדרה מונוטונית יורדת כאשר n מספיק גדול. אז טור מתכנס בתנאי כאשר $t=-3$.

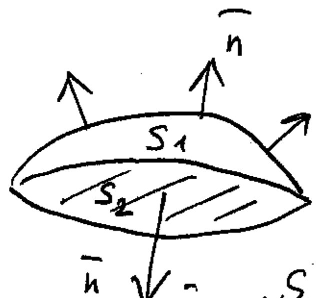
$$-3\le x-2<3$$

תשובה: $\{-1\le x<5\}$; בנק' $x=-1$ טור מתכנס בתנאי

שאלה מס' 6. מצאו שתף של שדה $\bar{F}=(xy^2, yz^2, x^2z+1)$ דרך חצי ספירה

$$S_1=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4,\quad 0\le z\}$$

נתון כי אוריינטציה של משטח S היא כלפי מעלה (בכיוון של ציר z).



$$\operatorname{div}\bar{F}=y^2+z^2+x^2$$

כדי להשתמש בנוסחת גאוס נשלים את המשטח "מכסה" תחתון: $S_2=\left\{(x,y,z)\;\middle|\; \begin{matrix} z=0\\ x^2+y^2\le 4\end{matrix}\right\}$.

נוסחת גאוס:

$$\oiint_{S_1\cup S_2}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dV$$

כאשר V - חצי כדור. אז

$$\iint_{S_1}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dV-\iint_{S_2}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS$$

בקואורדינטות כדוריות:

1) $$\iiint_V \underbrace{\operatorname{div}F}_{=r^2}\,dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 dr\,\underbrace{(r^2\sin\theta)}_{\text{יקוביאן}}\,\underbrace{r^2}_{\operatorname{div}\bar{F}}=$$

$$=2\pi\cdot\underbrace{(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^2=\frac{64\pi}{5}$$

2) $$\iint_{S_2}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iint_{S_2}\bar{F}\Big|_{z=0}\cdot(0,0,-1)\,dS=\iint_{\{x^2+y^2\le 4\}}(-1)\,dx\,dy=$$

$$=-4\pi$$

תשובה:

$$\iint_{S_1}\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\left(\frac{64}{5}+4\right)\pi=16\frac{4}{5}\pi$$