



אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 06.07.2010

מרצה: פרופ' ל. פריגוזין

מבחן ב: חדר'א למערכות מיידע 2

מס' הקורס: 201.1.9761

סמ' ב $\mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{C}$ משך הבחינה - 3 שעות

חומר עזר: 2-דפי נוסחאות A4 (משני צדדים),

מחשב כיס עם צג קטן.

יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות) ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לשיוטת השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

א1 (10 נק') מצאו משוואת הישר העובר דרך נקודה $(-1, 2, -3)$ ומקביל לכל אחד משני

המישורים הבאים: $4x + y - 3z - 7 = 0$ ו- $6x - 3y + 2z - 8 = 0$.

$$\vec{\ell} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 26\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$M(-1, 2, -3)$$

משוואת הישר:

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{26} = \frac{z+3}{18}$$

(ב) (15 נק') נתונים שני ישרים:

$$\begin{cases} x-2y+z+9=0 \\ 2x+y-z-10=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+2z+5=0 \\ 3x+4y+2z+1=0 \end{cases}$$

מה מצב הדדי של הישרים?

$$x=t$$

$$\begin{cases} -2y+z=-9-t \\ y-z=10-2t \end{cases}$$

$$y=3t-1$$

$$z=5t-11$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+11}{5}$$

$$M_1(0, -1, -11)$$

$$\vec{e}_1 = (1, 3, 5)$$

$$x=t$$

$$\begin{cases} 3y+2z=-t-5 \\ 4y+2z=-3t-1 \end{cases}$$

$$y=-2t+4$$

$$z=\frac{5}{2}t - \frac{17}{2}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+\frac{17}{2}}{5/2}$$

$$M_2(0, 4, -\frac{17}{2})$$

$$\vec{e}_2 = (1, -2, 5/2)$$

\vec{e}_1 ו- \vec{e}_2 הם מקבילים (1)

(2)

$$M_1, M_2 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5/2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 5/2 \end{vmatrix} = 0$$

לכן הם מקבילים

(א2) (13 נק') פונקציה $z(x, y)$ מוגדרת כפונקציה סתומה על ידי משוואה $z^3 - xz + y = 0$

ותנאי $f(3, -2) = 2$. מצאו את הדיפרנציאל $d^2z(3, -2)$.

$$F = z^3 - xz + y$$

$$3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{z}{3z^2 - x}$$

$$z'_x(3, -2) = \frac{2}{12 - 3} = \frac{2}{9}$$

$$6z(z'_x)^2 + 3z^2 z''_{xx} - z'_x - z'_x - xz''_{xx} = 0 \Rightarrow$$

$$z''_{xx} = \frac{-6z(z'_x)^2 + 2z'_x}{3z^2 - x}$$

$$z''_{xx}(3, -2) = -\frac{4}{243}$$

$$3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{1}{3z^2 - x}$$

$$z'_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$$

$$6z(z'_y)^2 + 3z^2 z''_{yy} - xz''_{yy} = 0 \Rightarrow$$

$$z''_{yy} = \frac{-6z(z'_y)^2}{3z^2 - x}$$

$$z''_{yy}(3, -2) = -\frac{4}{243}$$

$$6zz'_x z'_y + 3z^2 z''_{xy} - z'_y - xz''_{xy} = 0 \Rightarrow$$

$$z''_{xy} = \frac{-6zz'_x z'_y + z'_y}{3z^2 - x}$$

$$z''_{xy}(3, -2) = \frac{5}{243}$$

$$d^2z(3, -2) = -\frac{4}{243} dx^2 + \frac{10}{243} dx dy - \frac{4}{243} dy^2$$

(ב) (12 נק') נתונה פונקציה $u(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$. חשבו את הביטוי $s = xu'_x + yu'_y + zu'_z$.

$$u = e^{\frac{z}{y}(\ln x - \ln y)} = e^{\varphi(x, y, z)}$$

$$u_x = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{\varphi} \left(\frac{z}{xy}\right)$$

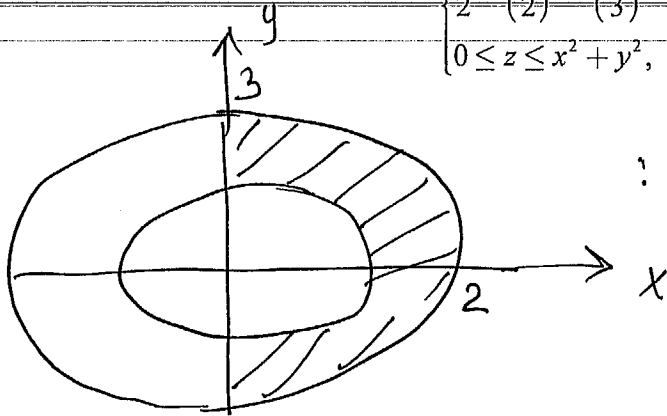
$$u_y = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{\varphi} \left[-\frac{z}{y^2}(\ln x - \ln y) - \frac{z}{y^2}\right]$$

$$u_z = e^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = e^{\varphi} \left[\frac{1}{y}(\ln x - \ln y)\right]$$

$$xu_x + yu_y + zu_z = e^{\varphi} \left[\frac{z}{y} - \frac{z}{y}(\ln x - \ln y) - \frac{z}{y} + \frac{z}{y}(\ln x - \ln y)\right] = 0$$

שאלה מס' 3 מצאו נפח של הגוף הבא:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$



תחום הא'נא'רליה:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi \\ y &= 3r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq r^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1$$

$$|J| = 6r$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (4r^2 \cos^2 \varphi + 9r^2 \sin^2 \varphi) 6r dr =$$

$$= 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(4 + 5 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) r^3 dr =$$

$$= 6 \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \cdot \left(6.5\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 6 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{2} \pi = \underline{\underline{\frac{117 \cdot \pi}{16}}}$$

(84) (13 נק') השתמשו בשיטת כופלי לגרנז' כדי למצוא על עקום $x^4 + y^4 = 1$ את הנקודות הקרבות ביותר והרחקות ביותר מראשית הצירים.

$f = x^2 + y^2, \quad g = x^4 + y^4 - 1 = 0$

$L = f + \lambda g$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda y^3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + 2\lambda x^2) = 0 \\ y(1 + 2\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

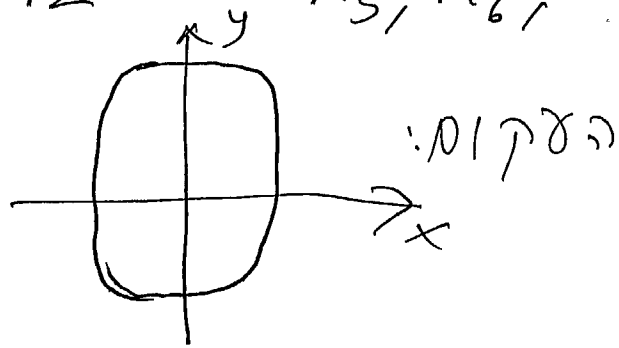
נקודות קיצון

- $x = 0 \rightarrow y^4 = 1, \quad y = \pm 1 \rightarrow M_1(0, 1), M_2(0, -1)$
- $y = 0 \rightarrow x^4 = 1, \quad x = \pm 1 \rightarrow M_3(1, 0), M_4(-1, 0)$
- $x \neq 0, y \neq 0 \quad x^2 = -\frac{1}{2\lambda} = y^2 \Rightarrow x = \pm y$
 $2x^4 = 1 \quad x^4 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$M_5, M_6(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad M_7, M_8(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\nabla g = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$ נקודות קיצון

min $\leftarrow f = 1$ M_1, M_2, M_3, M_4 נקודות קיצון
max $\leftarrow f = \sqrt{2}$ M_5, M_6, M_7, M_8



(ב) (12 נק') מצאו נקודות קיצון של פונקציה $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\left. \begin{aligned} z'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} x^2 &= y \\ y^2 &= x \end{aligned}$$

1) $x=0, y=0$

2) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{x}{y} = 1$
 $x=1, y=1$

$$z_{xx} = 6x$$

$$z_{yy} = 6y$$

$$z_{xy} = -3$$

$$D = 36xy - 9$$

$$D(0,0) = -9 < 0 \rightarrow \text{פ' כלל}$$

$$\left. \begin{aligned} D(1,1) &= 27 > 0 \\ z_{xx}(1,1) &= 6 > 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\text{מין'ן}}$$

(א5) (7-נק') האם טור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \right)$ מתכנס? הסבירו.

אם $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ו $b_n = \frac{1}{n}$ אז $\frac{b_n}{a_n} = \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{n} = n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ כ $n \rightarrow \infty$

פונקציה: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{Lop}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 0$

כא $\sum a_n$ מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 1)^{4n+1}}{4n+1}$$

(א5) (18 נק') מצאו תחום ההתכנסות וגם סכום של הטור הבא:

אם $t = x^2 - 1$ אז $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{4n+1}$ ו $S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (t^4)^n = \frac{1}{1-t^4} - 1$ (כא $|t| < 1$)

$S(t) = \int_0^t \frac{dt}{1-t^4} - t = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right] dt - t =$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \arctg t - t$ $S(x) = S(t) \Big|_{t=x^2-1}$

תחום ההתכנסות: $R=1$ ו $t = \pm 1$ (כא $\sum (t^4)^n$ ו $t = \pm 1$)

$0 < x^2 < 2 \iff -1 < x^2 - 1 < 1$

$0 < |x| < \sqrt{2}$