אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבוחן 25.07.2010
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין
מבחן ב: **חדו"א למערכות מידע 2**
מס' הקורס: 201.1.9761
סמ' ב מועד ב משך הבחינה- 3 שעות
חומר עזר: **2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים),**
מחשב כיס עם צג קטן.

יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה ל- 25 נקודות) ולפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה השתמשו במחברת המצורפת לשאלון זה.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

1א) (13 נק') מצאו משוואת המישור העובר דרך הישר $\begin{cases} 3x-2y+z-3=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ (הישר כולו מונח במישור המבוקש) ומאונך למישור $x-2y+z+5=0$.

$M_0: \quad x=0 \to z=0,\ y=-\frac{3}{2}$

כיוון הישר:

$M_0(0,-\frac{3}{2},0)$

$\bar{\ell} = \bar{N_1} \times \bar{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\bar{i}+7\bar{j}+2\bar{k}$

מישור:

$\bar{N} \perp \bar{\ell}, \quad \bar{N} \perp \bar{N_3} \implies$

ניתן לבחור

$\bar{N} = \bar{\ell} \times \bar{N_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11\bar{i}-2\bar{j}-15\bar{k}$

תשובה: משוואת המישור

$11(x-0)-2(y+\frac{3}{2})-15(z-0)=0$

$11x-2y-15z-3=0$

1ב) (12 נק') חשבו פולינום טיילור מסדר 2 של פונקציה $u = x^y y^x$ בסביבת נקודה $M(1,1)$. השתמשו בו כדי לחשב קירוב ל- $1.02^{1.03}\,1.03^{1.02}$

$u = e^{\varphi(x,y)}$, $\varphi(x,y) = y\ln x + x\ln y$

$\varphi(1,1) = 0$

$u(1,1) = 1$

$u'_x = e^\varphi \varphi'_x = e^\varphi\left(\frac{y}{x} + \ln y\right)$ $u_x(1,1) = 1$

$u''_{xx} = e^\varphi\left[\left(\frac{y}{x} + \ln y\right)^2 - \frac{y}{x^2}\right]$ $u_{xx}(1,1) = 0$

$u''_{xy} = e^\varphi\left[\left(\frac{y}{x} + \ln y\right)\underbrace{\left(\ln x + \frac{x}{y}\right)}_{\varphi'_y} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}_{\varphi''_{xy}}\right]$

$u_{xy}(1,1) = 3$

$u'_y = e^\varphi\left[\ln x + \frac{x}{y}\right]$

$u'_y(1,1) = 1$

$u''_{yy} = e^\varphi\left[\left(\ln x + \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y^2}\right]$ $u''_{yy}(1,1) = 0$

$u(1.02, 1.03) \approx u(1,1) + u'_x(1,1)0.02 + u'_y(1,1)\cdot 0.03 +$

$+ \frac{1}{2}\left[u''_{xx}(1,1)0.02^2 + 2u_{xy}(1,1)0.02\cdot 0.03 + u''_{yy}\,0.03^2\right]$

$= 1 + 0.02 + 0.03 + 3\cdot 0.02\cdot 0.03 =$

$= 1.0518$

שאלה מס' 2

2א) (17 נק') באיזו נקודות מישור משיק למשטח $2(x^2+y^2+z^2)-xy-xz-yz=35$ מקביל למישור $x+2y+z=0$?

תהי נק' $M(x,y,z)$ ש"כ למשטח, אז

נורמל למישור משיק בנק' M ניתן לרשום כ-

$$\overline{N_0}=(4x-y-z,\ 4y-x-z,\ 4z-x-y)$$

נורמל למישור נתון:

$$\overline{N_1}=(1,2,1)$$

אם $\overline{N_0}\parallel\overline{N_1}$ (המישורים מקבילים) אז

$$\frac{4x-y-z}{1}=\frac{4y-x-z}{2}=\frac{4z-x-y}{1}=t$$

$$\begin{cases}4x-y-z=t\\ -x+4y-z=2t\\ -x-y+4z=t\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}5x-5z=0, & z=x\\ 5x-5y=-t & y=x+\frac{t}{5}\end{matrix}$$

$$4x-y-z=t \Rightarrow 4x-x-\frac{t}{5}-x=t$$

$$2x=\frac{6}{5}t$$

הנקודה ש"כ למשטח, אז $\leftarrow$ $\begin{cases}x=\frac{3}{5}t\\ y=\frac{4}{5}t\\ z=\frac{3}{5}t\end{cases}$

$$t^2\frac{2(9+16+9)-12-9-12}{25}=35$$

$$\frac{35}{25}t^2=35 \qquad t=\pm 5$$

<u>תשובה</u>: שתי נקודות

$$\pm(3,4,3)$$

2ב) (8 נק') הוכיחו כי פונקציה $w=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ מקיימת את המשוואה הבאה:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$W=\frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$W'_x=\frac{1}{2}\,\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$W''_{xx}=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}$$

$$W''_{yy}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]^2}$$

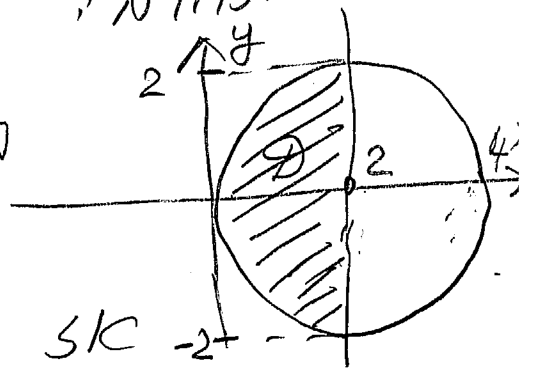
$$W''_{xx}+W''_{yy}=0$$

שאלה מס' 3 מצאו נפח של הגוף הבא: $\left\{x^2+y^2 \le 4x,\quad x \le 2,\quad y^2 \le z \le 8-x^2\right\}$

$0 \ge x^2+y^2-4x = (x-2)^2+y^2-4 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 \le 4$

$D:\ \begin{cases}(x-2)^2+y^2 \le 4\\ x \le 2\end{cases}$

תחום י,



בתחום D $|y|\le 2$ ו- $0\le x\le 2$ אז

$8-x^2 \ge 8-4 = 4 \ge y^2$

אז בתחום זה $y^2 \le 8-x^2$

ולכן תחום האינטגרציה:

$V=\iint_D (8-x^2-y^2)\,dx\,dy = \quad \begin{cases} x = 2+r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi\\ 0\le r\le 2\\ J = r\end{cases}$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(8-(2+r\cos\varphi)^2-r^2\sin^2\varphi\right) d\varphi =$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi \int_0^2 \left[4r-4r^2\cos\varphi-r^3\right] dr =$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left[2r^2-\frac{4}{3}r^3\cos\varphi-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left[8-\frac{32}{3}\cos\varphi-4\right] d\varphi =$

$= 4\pi - \frac{32}{3}\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \underline{\underline{4\pi+\frac{64}{3}}}$

4א) (12 נק') בין הגלילים בעלי נפח V מחפשים את הגליל עם שטח פנים מינימאלי.
השתמשו בשיטת כופלי לגרנז' כדי למצוא רדיוס r וגובה h של הגליל.

$$V = \pi r^2 h \qquad S = \underbrace{2\pi r h + 2\pi r^2}_{f}$$

$$\min\left(2\pi r h + 2\pi r^2\right)$$

$$\underbrace{\pi r^2 h - V}_{g} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r + \lambda(2\pi r h) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r + \lambda(\pi r^2) = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

$$h + 2r + \lambda r h = 0 \qquad \Rightarrow r = -\frac{2}{\lambda}$$
$$2r + \lambda r^2 = 0$$

$$h - \frac{4}{\lambda} + \lambda h\left(-\frac{2}{\lambda}\right) = h - \frac{4}{\lambda} - 2h = 0$$
$$h = -\frac{4}{\lambda} = 2r$$

$$\pi r^2 \cdot 2r = V$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

בדיקה נוספת

$$\begin{cases} \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

– אין פתרונות

4ב) **(13 נק')** מצאו נקודות קיצון של פונקציה $f=-x^2y^2+x^6+y^6$.

$$\begin{cases} f_x' = -2xy^2+6x^5=0 \\ f_y' = -2x^2y+6y^5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y^2-3x^4)=0 \\ y(x^2-3y^4)=0 \end{cases}$$

1) $x=0 \Rightarrow y=0$

$M_0(0,0)$

$f(M_0)=0$

2) $\begin{matrix} x\neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y^2=3x^4 \\ x^2=3y^4 \end{matrix}$

$\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^4}{y^4}$ $\quad x^6=y^6 \quad x=\pm y$

$x^2=3x^4 \quad x^2=\frac{1}{3} \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$M_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(M_{i>0})=-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=-\frac{1}{27}.$

$f_{xx}''=-2y^2+30x^4 \qquad f_{yy}''=-2x^2+30y^4 \qquad f_{xy}''=-4xy$

הנקודות $M_{i>0}$:

$$\left.\begin{matrix} f_{xx}''=f_{yy}''=-\frac{2}{3}+\frac{30}{9}=\frac{8}{3}>0 \\ f_{xy}''=\pm\frac{4}{3} \end{matrix}\right\} \quad \Delta=\frac{64}{9}-\frac{16}{9}>0$$

אלו נקודות <u>min</u>

בנקודה M_0:

$f_{xx}''=f_{yy}''=f_{xy}''=0, \quad \Delta=0$

לא ניתן להשתמש בתנאי מספיק לקיצון

אך קל לראות, שבכל סביבה של M_0 יש נקודות

עם ערך הפונקציה גדול מ-$f(M_0)=0$ וקטן ממנו:

$f(\varepsilon,0)=\varepsilon^6>0$

$f(\varepsilon,\varepsilon)=-\varepsilon^4+\varepsilon^6=\varepsilon^4(\varepsilon^2-1)<0$

אם ε - קטן. אז M_0 – <u>אוכף</u>

שאלה מס' 5

5א) (7 נק') האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$ מתכנס ? הסבירו.

$$0<\frac{n+2}{3n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}. \Rightarrow 0<\frac{n+2}{3n-1}<\frac{1}{2}$$

עבור n מספיק גדול

$$0<a_n<\frac{1}{2^{n^2}}<\frac{1}{2^n}$$

כי טור הנדסי מתכנס

אז גם $\sum_{1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5ב) (18 נק') מצאו תחום ההתכנסות וגם <u>סכום</u> של הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^n}$$

$$t=-\frac{1}{x} \qquad S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)t^n=\sum_{n=1}^{\infty}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=$$

$$=\frac{t}{1-t}+\ln(1-t) \qquad |t|<1$$

$$S(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x+1}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left|\frac{1}{x}\right|<1 \Rightarrow |x|>1$$