



אוניברסיטת בן גוריון בנגב  
מדור בחינות

תאריך הבחינה 25.11.10  
מרצה: פרופ' ל. פריגוזין  
מבחן ב: מבוא למשוואות דיפרנציאליות  
מס' הקורס 0201.1.9031  
בוזן סמ' א  
משך הבחינה- 2 שעות  
תומר עזר: דף נוסחאות אחד (משני צדדים)

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות (משקל של כל שאלה שווה ל-25 נקודות).  
נא לפתור את השאלות בדפים המיועדים לכך בלבד. הטייטה לגריסה.

## בהצלחה!

שאלה מס' 1. מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$(x+4y)y' = 2x+3y-5$$

$$\begin{cases} x+4y=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0=4 \\ y_0=-1 \end{matrix}$$

$$X = x-4 \Rightarrow (X+4Y) \frac{dY}{dX} = 2X+3Y$$

$$Y = y+1 \Rightarrow Y = z(X)X \Rightarrow (X+4zX)(z + Xz') = 2X+3Xz$$

$$(1+4z)z + (1+4z)Xz' = 2+3z$$

$$(1+4z)Xz' = 2+3z - z - 4z^2$$

$$(1+4z)Xz' = -2(2z^2 - z - 1)$$

$$\begin{aligned} 2z^2 - z - 1 &= 0 \\ z_1 &= 1, z_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$Y = X, Y = -X/2$$

$$\frac{1+4z}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{(1+4z)dz}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} = -4 \frac{dX}{X}$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ \frac{A}{2}-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=\frac{10}{3} \\ B=\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$\frac{10}{3} \ln|z-1| + \frac{2}{3} \ln|z+\frac{1}{2}| = -4 \ln|x| + C$$

$$\frac{10}{3} \ln\left|\frac{y}{x}-1\right| + \frac{2}{3} \ln\left|\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right| = -4 \ln|x| + C$$

הגורם

$$\begin{cases} \frac{10}{3} \ln\left|\frac{y+1}{x-4}-1\right| + \frac{2}{3} \ln\left|\frac{y+1}{x-4}+\frac{1}{2}\right| + 2 \ln|(x-4)^2| = C \\ y+1 = x-4, \quad y+1 = -(x-4)/2 \end{cases}$$

שאלה מס' 2. פתרו את המשוואה הבאה:

$$y' = \frac{1}{x \tan y - \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 y}}}$$

$$\frac{dx}{dy} = x \operatorname{tg} y - \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 y}} \quad \text{משוואה דיפרנציאלית}$$

$$1. \quad x = ce^{\int \operatorname{tg} y} = ce^{-\ln|\cos y|} = \frac{c}{\cos y} \quad \leftarrow \text{פונקציה משולבת}$$

$$2. \quad x = c(y) \frac{1}{\cos y}$$

$$c'(y) \frac{1}{\cos y} = -\frac{1}{3(\sin y)^{2/3}}$$

$$c'(y) = -\frac{\cos y}{3(\sin y)^{2/3}}$$

$$c(y) = -\int \frac{\cos y \, dy}{3(\sin y)^{2/3}} = -\int \frac{d \sin y}{3(\sin y)^{2/3}} =$$

$$= -(\sin y)^{1/3} + C_0$$

$$x = \frac{1}{\cos y} \left( -(\sin y)^{1/3} + C_0 \right) \quad \text{התשובה}$$

שאלה מס' 3. פתרו בעיית תנאי התחלה

$$yy'' = -(y')^2(2y^2 + 1), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2e}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

$$yp \frac{dp}{dy} = -p^2(2y^2 + 1)$$

$$\frac{1}{2}y \frac{d(p^2)}{dy} = -p^2(2y^2 + 1) \quad u = p^2$$

$$\frac{du}{dy} = -2u(2y + \frac{1}{y})$$

$$\frac{du}{u} + 2(2y + \frac{1}{y})u = 0$$

$$u = C_1 e^{-2 \int (2y + \frac{1}{y}) dy} = C_1 e^{-2y^2 - 2 \ln|y|}$$
  
$$p^2 = C_1 \frac{e^{-2y^2}}{y^2} \quad p = \tilde{C}_1 \frac{e^{-y^2}}{y}$$

$$x=0 \rightarrow y=-1 \quad p = -\frac{1}{2e}$$

$$-\frac{1}{2e} = \tilde{C}_1 \frac{e^{-1}}{-1} \quad \tilde{C}_1 = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{e^{-y^2}}{y}$$

$$2y e^{+y^2} dy = dx$$

$$\int e^{+y^2} dy^2 = x + C_2$$

$$+e^{+y^2} = x + C_2$$

$$x=0 \rightarrow y=-1 \quad +e^{+1} = C_2$$

$$\underline{e^{y^2} = x + e}$$

תשובה

4. מצאו פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \left( \frac{x}{x^2 + 1} + x \ln x \right)$$

$$z^2 + 2z + 1 = 0 \rightarrow (z+1)^2 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

פתרון כללי  
א' ו' ב' ו' ג' ו' ד' ו' ה'

$$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x} \quad \text{! ג' ו' ב' ו' א' ו' ד' ו' ה' e}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2' (e^{-x} - x e^{-x}) = e^{-x} \left( \frac{x}{x^2 + 1} + x \ln x \right) \end{cases}$$

$$C_2' = + \frac{x}{x^2 + 1} + x \ln x$$

$$C_1' = - \frac{x^2}{x^2 + 1} - x^2 \ln x$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \ln x d(x^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_{20}$$

$$C_1 = - \int \left( 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx - \frac{1}{3} \int \ln x d(x^3) =$$

$$= -x + \text{arctg } x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= -x + \text{arctg } x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{1}{9} x^3 + C_{10}$$

הגורם

$$y = e^{-x} \left( -x + \text{arctg } x - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + C_{10} \right) +$$

$$+ x e^{-x} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_{20} \right)$$

5. יהיו  $y_1(x), y_2(x)$  שני פתרונות של משוואה ליניארית הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ו-  $W = W[y_1, y_2](x)$  הוא וורונסקיאן בנוי על הפתרונות. הוכיחו נוסחת אבל (Abel):

$$W = Ce^{-\int p(x) dx}$$

$$\begin{array}{l}
 y_1 \circ \quad y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \\
 y_2 \circ \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0
 \end{array}$$

$$\underbrace{y_2'' y_1 - y_1'' y_2}_{W'} + p \underbrace{(y_2' y_1 - y_1' y_2)}_{W} = 0$$

$$W' = y_2'' y_1 + y_2' y_1' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_2'' y_1 - y_1'' y_2$$

$$W' + p W = 0 \Rightarrow \underline{W = C e^{-\int p(x) dx}}$$